

合成フィルタを利用した構造同定法

東京ガス 正員 坂上 貴士
 京都大学防災研究所 正員 佐藤 忠信
 東電設計 正員 吉田 郁政

1. まえがき

近年、非線形非ガウス空間の同定が可能であるモンテカルロフィルタを用いた構造同定手法の開発が盛んに行われている。しかし、それら既往の手法では構造系の応答への寄与が小さなパラメータ（例えば減衰定数）に対しての同定結果は不安定であり、その点を改善する手法の開発は行われていない。そこで、本研究では、カルマンフィルタとモンテカルロフィルタを合成したハイブリッド型フィルタの開発を行い、同定結果の収束性向上を図った。

2. フィルタ理論

(1) 状態空間モデル

時刻 $n-1$ から時刻 n への状態量 $\mathbf{x}$ の遷移と、時刻 n における状態量と時刻 n において得られた観測量 $\mathbf{z}$ の関係式は次式で表される状態空間モデルを用いて表現される。

$$\mathbf{x}_n = F(\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{w}_n) \quad (1)$$

$$\mathbf{z}_n = H(\mathbf{x}_n, \mathbf{v}_n) \quad (2)$$

ここで F, H は任意関数であり、 $\mathbf{w}_n$ はシステムノイズ、 $\mathbf{v}_n$ は観測ノイズである。ここで、各変数の下付文字は時刻を表す。一般に式 (1) は状態方程式、式 (2) は観測方程式と呼ばれる。カルマンフィルタ、モンテカルロフィルタとも、以上の状態空間モデルより誘導される。

(2) カルマンフィルタ (KF)

KF は状態空間モデルの線形性、ノイズのガウス性が仮定される場合にのみアルゴリズムが構成される。よって、状態方程式は、式 (1),(2) に線形性の制約を課した、次式で表現されるものとする。

$$\mathbf{x}_n = \Phi_n \mathbf{x}_{n-1} + \Gamma_n \mathbf{w}_n \quad (3)$$

$$\mathbf{z}_n = \mathbf{H}_n \mathbf{x}_n + \mathbf{v}_n \quad (4)$$

ここで、 Φ_n は遷移行列と呼ばれる。 Γ_{n-1} はシステムノイズの遷移を支配する既知の行列である。

以上の状態空間モデルをもとに KF は以下のアルゴリズムで構成される。

1. 状態量初期値 $\mathbf{x}_0$ と初期共分散 $\mathbf{P}_0$ を仮定する。

2. 状態量の事前推定量 $\bar{\mathbf{x}}_n$ と事前共分散 $\mathbf{M}_n$ を次式で求める。

$$\bar{\mathbf{x}}_n = \Phi_n \hat{\mathbf{x}}_{n-1} + \Gamma_n \hat{\mathbf{w}}_n \quad (5)$$

$$\mathbf{M}_n = \Phi_n \mathbf{P}_{n-1} \Phi_n^T + \Gamma_n \Omega_n \Gamma_n^T \quad (6)$$

3. 状態量の事後共分散 $\mathbf{P}_n$ を次式で求める。

$$\mathbf{P}_n = (\mathbf{M}_n^{-1} + \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \quad (7)$$

4. カルマンゲイン $\mathbf{K}_n$ を次式で求める。

$$\mathbf{K}_n = \mathbf{M}_n \mathbf{H}^T (\mathbf{H} \mathbf{M}_n \mathbf{H}^T + \mathbf{R}_n)^{-1} \quad (8)$$

5. 状態量の最尤推定値 $\hat{\mathbf{x}}_n$ を次式で求める。

$$\hat{\mathbf{x}}_n = \bar{\mathbf{x}}_n + (\mathbf{z}_n - \mathbf{H} \bar{\mathbf{x}}_n) \quad (9)$$

(3) モンテカルロフィルタ (MCF)

MCF は状態量の条件付確率分布を粒子と呼ばれる多数の実現値で近似し、その粒子を遷移、評価、復元抽出する事で非線形非ガウス空間の同定を可能としたアルゴリズムである。

MCF は式 (1),(2) で表される状態空間モデルをもとに構成されるため、KF よりもより一般的なモデルへの適用が可能となる。つまり、式 (1),(2) におけるシステムノイズ $\mathbf{w}_n$ と観測ノイズ $\mathbf{v}_n$ はそれぞれ任意の分布 $q(\mathbf{w})$ と $r(\mathbf{v})$ に従うものとして良い。しかし、観測ノイズ $\mathbf{v}_n$ は状態量 $\mathbf{x}_n$ と観測量 $\mathbf{z}_n$ が与えられると一意に定まり、観測量 $\mathbf{z}_n$ により微分可能な関数 G を用いて以下のように表されるものとする。

$$\mathbf{v}_n = H^{-1}(\mathbf{z}_n, \mathbf{x}_n) = G(\mathbf{z}_n, \mathbf{x}_n) \quad (10)$$

分布 $p(\mathbf{x}_n | \mathbf{Z}_{n-1})$ に従う粒子を予測粒子 $\mathbf{b}_n$ 、分布 $p(\mathbf{x}_n | \mathbf{Z}_n)$ に従う粒子を予測粒子 $\mathbf{f}_n$ とすると、MCF は以下のアルゴリズムにより構成される。

1. $j = 1 \sim m$ について乱数 $\mathbf{f}_0^{(j)} \sim p_0(\mathbf{x})$ を生成し、状態量の初期分布を作成する。
2. $n = 1 \sim N$ について以下の過程を繰り返す。
 - (a) $j = 1 \sim m$ について乱数 $\mathbf{w}_n^{(j)} \sim q(\mathbf{w}_n)$ を生成し、システムノイズ粒子を作成する。
 - (b) $j = 1 \sim m$ について次式の状態方程式より粒子の遷移を計算する。

$$\mathbf{b}_n^{(j)} = F(\mathbf{f}_{n-1}^{(j)}, \mathbf{w}_n^{(j)}) \quad (11)$$

(c) $j = 1 \sim m$ について尤度を次式で計算する.

$$\alpha_n^{(j)} = r(G(\mathbf{z}_n, \mathbf{b}_n^{(j)})) \left| \frac{\partial G}{\partial \mathbf{z}_n} \right| \quad (12)$$

(d) $j = 1 \sim m$ について $\alpha_n^{(j)}$ に比例する確率で $\{\mathbf{b}_n^{(j)} \dots \mathbf{b}_n^{(m)}\}$ を復元抽出することにより $\mathbf{f}_n^{(j)}$ を得る.

$$\mathbf{f}_n^{(k)} = \mathbf{b}_n^{(k)} \text{ with probability } \frac{\alpha_n^{(k)}}{\sum_{j=1}^{(m)} \alpha_n^{(j)}} \quad (13)$$

(e) (a) に戻る.

(4) ハイブリッド型フィルタを用いた構造同定法

ハイブリッド型フィルタを用いた構造同定法は, 同定対象となる状態量のうち, 構造系の応答部分に関してはガウス性を仮定し, KF を用いて状態量 $\mathbf{x}_\alpha = \{\dot{y}, y\}$ の更新を行い, 動特性部分に関しては粒子表現 $\mathbf{f}^{(j)} = \{h^{(j)}, \omega^{(j)}\}$ を用い, MCF で同定を行う. 以下, 簡単にアルゴリズムを示す.

1. 状態量の初期値 $\mathbf{x}_{\alpha,0}$ と初期共分散 $\mathbf{P}_0$ を設定する. 動特性については初期分布 $p(\mathbf{f}_0)$ に従う m 個の粒子 $\mathbf{f} = \{h_0^{(j)}, \omega_0^{(j)}\}$ を発生させる.
2. 以下の過程を繰り返す.

- (a) 動特性に関するシステムノイズ粒子 $\mathbf{w}_n^{(j)}$ を発生させる.
- (b) 動特性粒子 $\mathbf{f}_{n-1}^{(j)}$ に動特性に関するシステムノイズを付加し, $\tilde{\mathbf{f}}_{n-1}^{(j)}$ を作る.

$$\tilde{\mathbf{f}}_n^{(j)} = \mathbf{f}_{n-1}^{(j)} + \mathbf{w}_n^{(j)} \quad (14)$$

- (c) 動特性の各粒子 $\tilde{\mathbf{f}}_n^{(j)}$ を用いて応答に関する状態方程式を作成する.

$$\mathbf{x}_{\alpha,n}^{(j)} = \Phi^{(j)}(\mathbf{x}_{\alpha,n-1}) + \mathbf{w}_{\alpha,n} \quad (15)$$

- (d) 上式を線形化し KF を適用する. ただし遷移行列 Φ_n は次式のようになる.

$$\Phi = \begin{Bmatrix} 1 - 2\tilde{h}_n^{(j)}\tilde{\omega}_n^{(j)}\Delta t & -\tilde{\omega}_n^{(j)2} \\ \Delta t & 1 \end{Bmatrix} \quad (16)$$

- (e) 各粒子について, カルマンゲイン $\mathbf{K}_n^{(j)}$, 状態量の最尤推定値 $\hat{\mathbf{x}}_{\alpha,n}^{(j)}$ と事後共分散 $\mathbf{P}_n^{(j)}$, 尤度 $\alpha_n^{(j)}$ を次式で求める.

$$\mathbf{K}_n^{(j)} = \mathbf{P}_n^{(j)} \mathbf{H} \mathbf{R}_n^{-1} \quad (17)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{\alpha,n}^{(j)} = \bar{\mathbf{x}}_{\alpha,n} + \mathbf{K}_n^{(j)}(\mathbf{z}_n - \mathbf{H}\bar{\mathbf{x}}_{\alpha,n}) \quad (18)$$

$$\mathbf{P}_n^{(j)} = (\mathbf{M}_n^{(j)-1} + \mathbf{H}^T \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{H})^{-1} \quad (19)$$

$$\alpha_n^{(j)} = p(\mathbf{z}_n | \hat{\mathbf{x}}_{\alpha,n}^{(j)}) \quad (20)$$

- (f) 尤度 $\alpha_n^{(j)}$ に応じて動特性を復元抽出し, $\mathbf{f}_n^{(j)}$ を生成させる. 状態量に関する情報は何らかの方法で一意的に定め, 次時刻に受け継ぐ.

(5) 数値解析例

動特性が時間的に変化する非定常構造系を対象に MCF とハイブリッド型フィルタを用いて同定を行った. 同定の対象となる構造系は 5 自由度非定常構造系で, 質点 1 における動特性が同定開始から 500 ステップ後に 20% 低下し, 1500 ステップ後から漸増する系である. 動特性の初期分布は真値を平均値とするガウス分布に従うものとする. 解析に用いた粒子数は 30000 個, 観測ノイズは 3% とした. 図-1 は MCF を用いた場合の減衰定数と固有円振動数の同定結果である. 固有円振動数の同定結果は非定常性へ追従できているが, 減衰定数については非定常性へ追従できてはいない.

図-2 はハイブリッド型同定アルゴリズムを用いた場合の減衰定数と固有円振動数の同定結果である. 固有円振動数の同定結果は非定常性へ追従できている. 減衰定数の同定結果は MCF によるそれに比べると, 非定常性の追従性が改善されていることが分かる.

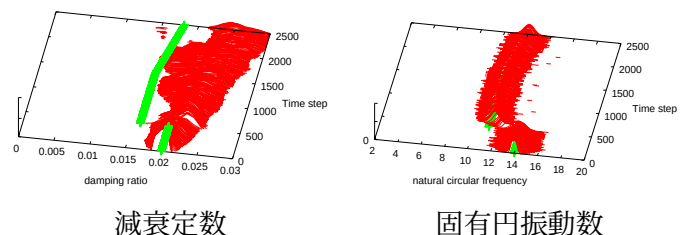


図-1 MCF による同定結果

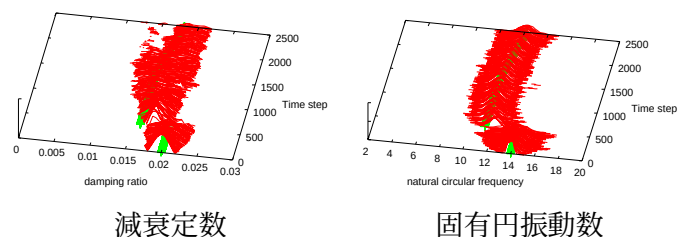


図-2 ハイブリッド型フィルタによる同定結果

3. 結論

本研究ではカルマンフィルタとモンテカルロフィルタを合成した新たな構造同定アルゴリズムを開発した. 開発した手法を用いると, 既往のモンテカルロフィルタを用いた同定アルゴリズムでは, 不安定であったパラメータの同定が可能になることが示された.

参考文献

- 1) 北川源四郎: モンテカルロフィルタおよび平滑化について, 統計数理, 第 44 巻第 1 号, pp.31-48, 1996
- 2) Ikumasa Yoshida: Damage Detection Using Monte Carlo Filter Based on Non-Gaussian Noises, 8 th International Conference on Structural Safety and Reliability, June 2001