薄肉偏平殻の多自由度系としての非線形振動特性の解析

(株)サクラダ　正会員　○田中　利志　　長崎大学工学部　フェロー　高橋　和雄
長崎大学工学部　正会員　中村　聖三　　長崎大学大学院　学生会員　Wu Qing Xiong

１．まえがき

ケーブル，偏平アーチ，殻などのように曲面をもつ構造物には，構造形状に起因する２次の非線形項が存在するために，各種の不安定現象が存在する。著者らは，これまで曲率が大きい領域まで取扱い可能の薄肉殻構造を対象に１自由度系としての非線形振動解析を行い，非線形振動特性と各種の偏平殻の形状パラメーターの影響を明らかにしつつある [1)]。本研究では，薄肉偏平殻の非線形運動方程式を多自由度系に近似して，調和バランス法による非線形振動特性解析を行い，偏平殻の形状，各面内の境界条件のもとに，偏平殻の非線形振動特性を明らかにする。数値解析において多自由度系としての固有振動数解析および高次モードの非線形振動特性を各種のパラメーターのもとに明らかにする。

２．運動方程式および境界条件

構造系のモデルを図-１に示す薄肉偏平殻とする。

振動による薄肉偏平殻のたわみを w とすると，殻の非線形運動方程式と適合条件式は，次式で表わされる [2)]。

$$D\nabla^4 w-\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{1}{R_x}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}-\frac{1}{R_y}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\rho d\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-p_0\cos\Omega t=0 \qquad (1)$$

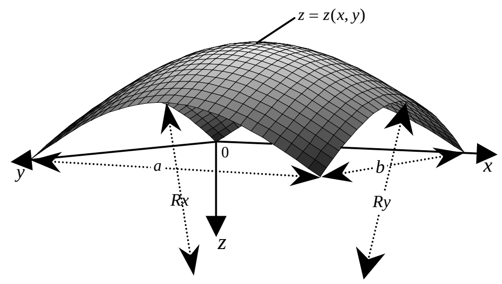
$$\frac{1}{Ed}\nabla^4 F-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{1}{R_x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{1}{R_y}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \qquad (2)$$

ここに，t：時間，d：板厚，ρ：板の密度，p：荷重強度，

F：Airy の応力関数，$\nabla^4=\frac{\partial^4}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4}{\partial y^4}$，$D=\frac{Ed^3}{12(1-\upsilon^2)}$，

υ:ポアソン比，E：ヤング率，Ω：加振円振動数。

殻の境界条件は，曲げに対して４辺単純支持(S)もしくは 4 辺固定支持(C)とし，面内変位 u，v は自由(1)もしくは固定(2)とする。



図－１　薄肉偏平殻の一般形状および座標系

３．解法

式(１)の解を境界条件を満足するように多自由度系として, 次のように仮定する。

$$\boldsymbol{w}=\sum_{\boldsymbol{i}}\sum_{\boldsymbol{j}}\boldsymbol{T_{ij}(t)}\,X_i(x)Y_j(y) \qquad (3)$$

ここに，$T_{ij}(t)$：未知の時間関数，$X_i(x)$，$Y_j(y)$：面外の境界条件を満足する関数

応力関数 F は，式(３)を用いて式(２)を解き，面内方向の境界条件を考慮して得られる。

運動方程式(１)に式(３)および得られた応力関数 F を代入して，Galerkin 法を適用し，１次モード T_{11} と任意の１個の高次モード(１次以外のモード) T_{ij} を選ぶと，運動方程式(１)は次のような時間に関する２自由度系の連立非線形常微分運動方程式に近似できる。なお，下線部は５次モード $(i,j)=(3,3)$ にのみ現れる項である。

$$\ddot{T}_{11}+2h_{11}\omega_{11}\dot{T}_{11}+\omega_{11}^2T_{11}+a_1T_{11}^2+a_2T_{ij}^2+a_3T_{11}^3+a_4T_{11}T_{ij}^2\underline{+a_6T_{11}T_{ij}+a_7T_{11}^2T_{ij}+a_8T_{ij}}=a_5\bar{p}\cos\omega\tau,$$
$$\ddot{T}_{ij}+2h_{ij}\omega_{ij}\dot{T}_{ij}+\omega_{ij}^2T_{ij}+b_1T_{11}T_{ij}+b_2T_{ij}^3+b_3T_{11}^2T_{ij}\underline{+b_5T_{ij}^2+b_6T_{11}^2+b_7T_{11}}=\delta_{ij}b_4\bar{p}\cos\omega\tau \qquad (4)$$

ここに，$a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,b_1,b_2,b_3,b_4,b_5,b_6,b_7$：係数，$h_{11},h_{ij}$：減衰定数，

ω_{11}，ω_{ij}：無次元固有円振動数，δ_{ij}：Kronecker のデルタ関数，$\bar{p}=p_0R_x/Ed\pi^2$：荷重強度,

$\omega=\Omega/\omega_0$：無次元加振円振動数，$\tau=\omega_0t$：無次元時間，ω_0：対応する平板の１次固有円振動数。

上式の解を次のように仮定する。

$$T_{11}=c_0^{11}+c_{1/2}^{11}\cos\frac{\omega}{2}\tau+s_{1/2}^{11}\sin\frac{\omega}{2}\tau+c_1^{11}\cos\omega\tau+s_1^{11}\sin\omega\tau,\quad T_{ij}=c_0^{ij}+c_1^{ij}\cos\omega\tau+s_1^{ij}\sin\omega\tau \qquad (5)$$

ここに，$c_0^{11},c_1^{11},s_1^{11}$：１次モードの付随型の振幅成分，$c_{1/2}^{11},s_{1/2}^{11}$：１次モードの分岐型の振幅成分,

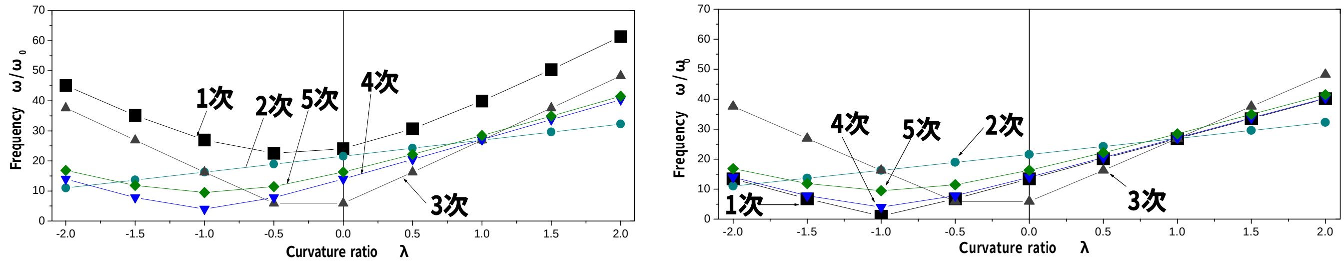
$c_0^{ij},c_1^{ij},s_1^{ij}$：高次モードの付随型の振幅成分

式(５)を式(４)に代入して，調和バランス法を適用すれば連立非線形代数方程式が得られる。これに Newton－

キーワード：偏平殻，非線形振動，多自由度系

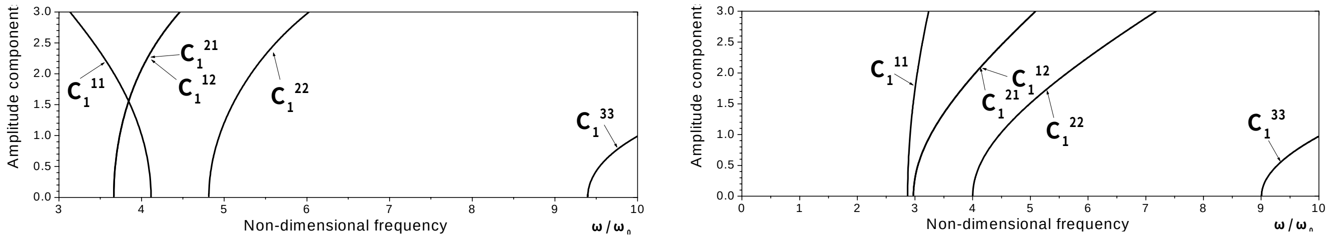
連絡先：〒852-8521 長崎市文教町 1-14 長崎大学工学部社会開発工学科 (TEL&FAX)095-848-9639

Raphson 法を用いて解けば，振幅成分が得られる。



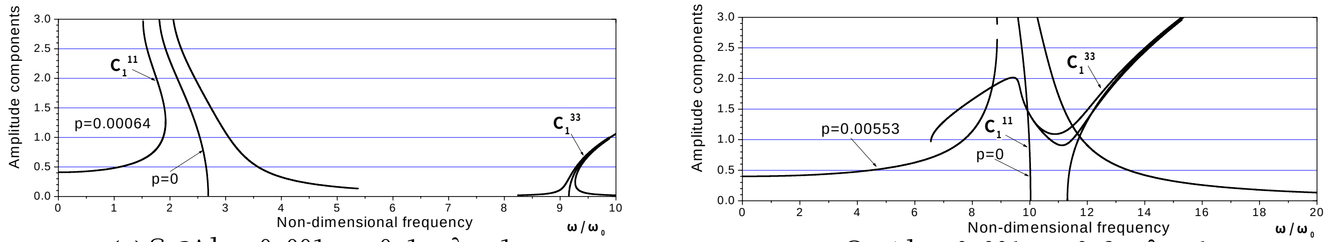
(a) S-2：k＝0.001，e＝0.4　　(b) S-1：k＝0.001，e＝0.4

図-2　線形自由振動曲線



(a) S-2：k=0.01，e＝0.4，λ＝1　　(b) S-2：k=0.01，e＝0.4，λ＝-1

図-3　非線形自由振動曲線



(a) S-2：k＝0.001，e=0.1 ，λ＝1　　(b) S-2：k＝0.001，e=0.2 ，λ＝1

図-4　応答曲線

４．解析結果

本研究で用いる無次元パラメーターは，$\mu = a/b = 1$（正方形），$k = d/R_x$：板厚半径比，$e = a/R_x$：辺長半径比，$\lambda = R_x/R_y$（曲率半径比$\lambda > 0$：ドーム形状，$\lambda = 0$：円筒形状，$\lambda < 0$：鞍形状にそれぞれ対応）とする。

(1)**固有振動特性**　１次振動から５次振動までの無次元固有振動数ω_{ij}と曲率半径比λとの関係を辺長半径比e=0.4の場合について図-2に示す(ν=0.3，k=0.001)。この場合はeの値が大きく殻の形状が薄くて深いため，λの影響が大きい。殻の場合は形状パラメーターの組み合わせによって１次モードの固有振動数が大きくなる。この場合，図-2(a)から明らかなように，１次モードの固有振動数よりも高次モードの固有振動数が小さくなることが示されている。また，殻の場合には，固有振動数は面内の境界条件の影響も受ける。

(2)**非線形自由振動**　１次振動から５次振動までの非線形自由振動曲線をλ＝1，-1の場合について図-2に示す(S-2：k=0.01，e=0.4，ν=0.3)。縦軸は，薄肉偏平殻の中央点の無次元振幅とし，横軸は無次元振動数とする。$\lambda \geq 0$のとき，振動数が振幅の増大とともに減少する軟化バネ特性を示す振幅領域が存在し，非線形自由振動特性に軟化，硬化バネ特性の共存が見受けられる。$\lambda < 0$のとき，硬化バネ特性のみが現われている。また，高次モードの非線形振動は振幅の増大とともに振動数が増加する硬化バネ特性のみをもつ。

(3)**非線形強制振動**　１次モードと５次モードの応答曲線をe=0.1，0.2の場合について図-3に示す(S-2:k=0.001，λ＝1，ν=0.3)。図-3(a)，(b)を比較すると，主調波応答は非線形自由振動と同様に形状パラメーターの影響を受け，その非線形振動特性は異なる。また，図-3(b)において非線形連成振動が発生している。これは，式(4)において高次モードの非線形運動方程式に１次モードの単独項が含まれており，１次モードの非線形運動方程式に高次モードの単独項が入っていることにより，１次モードの振動による高次モードの非線形連成振動および高次モードの振動による１次モードの非線形連成振動が発生するためである。

５．まとめ

(1)形状パラメーターの組み合わせによっては，１次モードの固有振動数が最も大きくなる。
(2)１次モードの非線形自由振動特性は，形状パラメーターの影響を受け，軟化・硬化バネ両特性をもつ場合と硬化バネ特性のみをもつ場合とがある。
(3)高次モードの非線形振動特性は，形状パラメーターによらず硬化バネ特性のみをもつ。

参考文献

1) Takahashi, K. and Midou, S. : Theoretical and Applied Mechanics, Vol.48, pp.121-126, 1999.
2) Kanazawa, K. and Hangai, Y. : Theoretical and Applied Mechanics, Vol.25, pp.75-87, 1977.