熱流を受ける縁クラックを有する円孔とクラックの干渉問題

○名古屋工業大学　学生会員　齊藤高広
名古屋工業大学　正員　長谷部宣男
名古屋工業大学　正員　王険峰

1．はじめに

本論文では、分数式の和の形で表される有理写像関数を用いて、熱流を受ける無限板中に縁クラックを有する円孔と、その近傍にクラックが存在する干渉問題の解析を行う。複素応力関数の誘導、そしてクラック先端での応力拡大係数を求める。

2．写像関数

図１のように円孔にクラックを有する無限板(z 平面)を考える。この解析形状を単位円外(ζ 平面)に写像する有理写像関数 $\omega(\zeta)$ は次式で与えられる[1]。

$$z=\omega(\zeta)=E_c+E_0\zeta+\frac{E_0}{2}\frac{1}{\zeta}+\sum_{k=1}^{24}\frac{E_k}{\zeta_k-\zeta} \qquad (1)$$

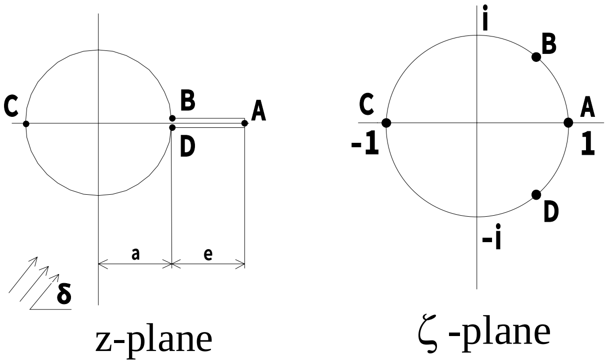

図１ 縁クラックを有する円孔と単位円

3．重ね合わせの原理

問題の解析にあたり、重ね合わせの原理を用いる。解きたい問題 A を、縁クラックを有する円孔に一様熱流が作用した問題 B[2]、dislocation の問題 C[3]、熱源対の問題 D[4]に分けて考える。それぞれの問題について複素応力関数を求め、クラックの条件が満足するように重ね合わせることで問題 A の解析を行う。

4．複素応力関数の誘導

問題 B について、一様熱流のみが作用し、外力が作用しない場合の外力及び変位の境界上の式は次式で表される。

$$\phi(\sigma)+\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\overline{\phi'(\sigma)}+\overline{\psi(\sigma)}=0 \qquad (2)$$

$$\kappa\phi(\sigma)-\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\overline{\phi'(\sigma)}-\overline{\psi(\sigma)}+2G\alpha'\int\Psi(\sigma)\omega'(\sigma)d\sigma=2G(u+iv) \qquad (3)$$

σ は単位円上の点である。(3)式左辺第 4 項は温度による変位を表し、熱弾性問題特有の項である。$\Psi(\zeta)$ は複素温度関数であり、次式で与えられる。

$$\Psi(\zeta)=-\frac{q}{k}\left(E_0\zeta e^{-i\delta}+\frac{\overline{E_0}}{\zeta}e^{i\delta}\right) \qquad (4)$$

また外力境界の解析接続条件より

$$\psi(\zeta)=-\overline{\phi}(1/\zeta)-\frac{\overline{\omega}(1/\zeta)}{\omega'(\zeta)}\phi'(\zeta) \qquad (5)$$

(3)式左辺第 4 項の積分を実行すると、変位の食い違いを生じる項 $\log\zeta$ が現れる。そこで $\phi_1(\zeta)=A\log\zeta$ 、$\psi_1(\zeta)=B\log\zeta$ なる関数を考える。そして求めたい複素応力関数 $\phi(\zeta)$、$\psi(\zeta)$ を次式の形で表す。

キーワード　破壊力学、応力拡大係数、写像関数、熱流、dislocation
連絡先　名古屋工業大学　〒466-855 名古屋市昭和区御器所町　TEL 052(732)2111

$$\phi(\zeta)=\phi_1(\zeta)+\phi_2(\zeta)\text{、}\psi(\zeta)=\psi_1(\zeta)+\psi_2(\zeta) \tag{6}$$

(6)式を(5)式に代入し、不正則項を打ち消すように$\phi_2(\zeta)$を決定する。(6)式より$\phi(\zeta)$が求まり、(5)式で$\psi(\zeta)$は表される。問題 C、D についても同様の方法により$\phi(\zeta)$、$\psi(\zeta)$が求められる。

5．応力拡大係数

図 2 に表すクラック両端の応力拡大係数は次式で与えられる。

$$K_A=-\sqrt{\frac{\pi}{b}}H(b)\qquad H(b)=\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}(-1)^{j+1}\left[H_n(t_j)+iH_\tau(t_j)\right]\cot\left[\frac{(2j-1)\pi}{4M}\right] \tag{7}$$

$$K_B=\sqrt{\frac{\pi}{b}}H(-b)\qquad H(-b)=\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}(-1)^{j+M}\left[H_n(t_j)+iH_\tau(t_j)\right]\tan\left[\frac{(2j-1)\pi}{4M}\right] \tag{8}$$

また円孔が有するクラック先端での応力拡大係数は次式で与えられる。

$$K_c=K_1+\sum_{j=1}^{M}\frac{\pi}{M}\left\{H(t_j)K_2(t_j)+\left(b^2-t_j^{\,2}\right)G(t_j)K_3(t_j)\right\} \tag{9}$$

H(t_j)はクラック上の dislocation で問題 C より求められる。また G(t_j)は熱源対での分布密度で問題 D より求められる。K_1, K_2, K_3はそれぞれ問題 B,C,D の$\phi'(\sigma)$より求められる応力拡大係数で、次式で定義される。

$$K_j=\frac{2\sqrt{\pi}e^{\frac{is\pi}{2}}\phi'(\sigma)}{\sqrt{\omega''(\sigma)}}\quad \text{(j=1,2,3)}\quad \left(\frac{s\pi}{2}\text{ はクラックと x 軸との成す角}\right) \tag{10}$$

応力拡大係数を以下のように無次元化する。

$$\begin{Bmatrix}F_{\mathrm{I}\,A,B,C}\\F_{\mathrm{II}\,A,B,C}\end{Bmatrix}=\frac{k}{\alpha qGR}\frac{1}{\sqrt{\pi l^3}}\begin{Bmatrix}K_{\mathrm{I}\,A,B,C}\\K_{\mathrm{II}\,A,B,C}\end{Bmatrix}\text{、}\ l=\frac{2a+e}{2} \tag{11}$$

図 2 は横軸に b/c または c/b をとり、クラックの中心位置が円孔が有するクラック先端から b=0～∞に対する応力拡大係数$F_{\mathrm{II}B}$を示す。初期段階での増加率が大きくその後は比較的なだらかに増加していく。e/a が小、つまり円孔の有するクラック長が短いほど$F_{\mathrm{II}B}$は大きい。

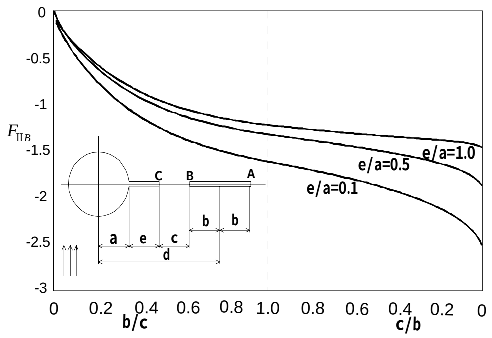

図 2　B 点の応力拡大係数(δ=90°,b/a=1.0)

図 3 はクラックの中心位置が x 軸上に存在し、熱流の向きが変化する場合を表す。$F_{\mathrm{I}B}$はδ=90°で 0 となり、δ=0°で最大値(引張モード)を示し、δ=180°で最小値(圧縮モード)を示す。e/a が小、つまり円孔の有するクラック長が短いほどクラックは進展しやすいことが図 3 からもわかる。

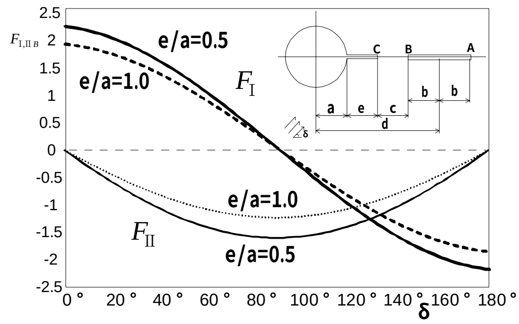

図 3　B点の応力拡大係数

(b/a=1.0,d/a=2.55)

図 4 はクラック中心の y 座標を一定にして、クラックの向きが変化する場合を表す。円孔半径を a、クラック中心の y 座標を f として f/a=0,1,10 の場合を示す。f/a=0 の時クラックの中心は x 軸上に存在し、f/a が大、つまりクラックの中心が x 軸から遠ざかるにつれて円孔の影響が小さくなり，値が小さくなっていくことがわかる。

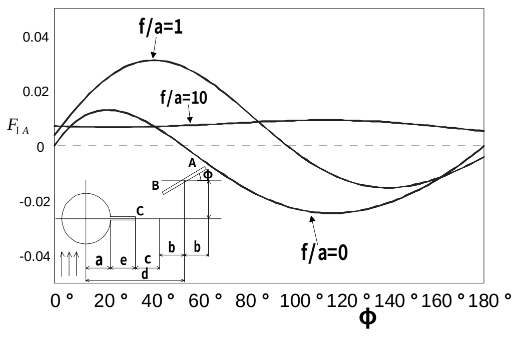

図 4 点 B の応力拡大係数

(b/a=1,d/a=2.55,e/a=0.5,δ=90°)

6．まとめ

円孔の有するクラックとその近傍にクラックがある無限板に熱流が作用する場合の解析を行った。写像関数の係数を代えることで異なった形状の解析ができる。また応力拡大係数を算出することでクラックの進展を解析できる。

参考文献　[1] N.Hasebe、H.Irikura、T.Nakamura　「A Solution of the Mixed Boundary Value Problem for an Infinite Plate With a Hole Under Uniform Heat Flux」Journal Applied Mechanics、Vol.58、pp.996-1000　1991