

電磁力を受ける無限板中の屈折クラックの応力解析

名古屋工業大学大学院 学生員 大松紀夫
 名古屋工業大学 伊東義貴
 名古屋工業大学 正員 長谷部宣男
 名古屋工業大学 正員 王 険峰

1. 序論

本論文では無限板中にスリット型，屈折クラック型の孔を有し，一様な磁場の外力境界値問題における一般解の誘導を行い，それを用いて表されるスリット先端および屈折クラック先端での応力拡大係数を用いて，クラックの進展挙動解析を行う．ただし，材料としては強磁性体を対象とし，したがって境界およびスリット面内，屈折クラック面内を磁場は通らないものとする．

2. 写像関数

図1のような屈折クラックを有する無限領域（ z 平面）を考える．この解析形状を単位円外（ ζ 平面）に写像する理写像関数 $\omega(\zeta)$ は次式で与えられる[1]．

$$z = \omega(\zeta) = E_0\zeta + \sum_{k=1}^{24} \frac{E_k}{\zeta_k - \zeta} + E_{-1}$$

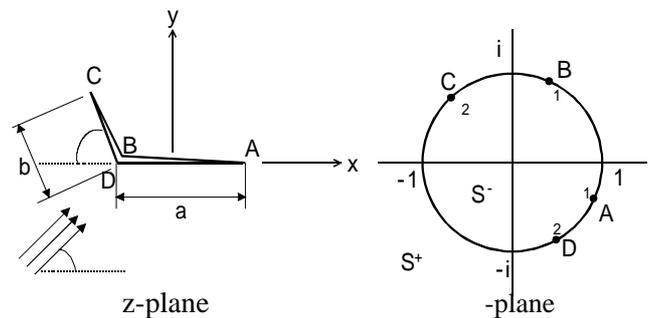


図1 解析形状と単位円

3. 磁場解析・応力解析

磁場の強さは，複素磁場関数 $A(\zeta)$ と有理写像関数

$\omega(\zeta)$ を用いて次のように与えられる．

$$a(z) = \alpha(\zeta) = H_x - iH_y = -\frac{A'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \quad (2)$$

また，境界条件式は次式で与えられる．

$$- \{A(\sigma) - \overline{A(\sigma)}\} = 2i \int H_n ds + const \quad (3)$$

ここで， σ は単位円上の ζ を表し， H_n は境界上での法線方向の磁場の強さを表す．また，一様磁場を考えているので材料中 (μ_e) から空気中 (μ_{e2}) に磁場が流れるとき，強磁性体の場合では透磁率に $\mu_e \gg \mu_{e2}$ の関係が成り立つので，境界

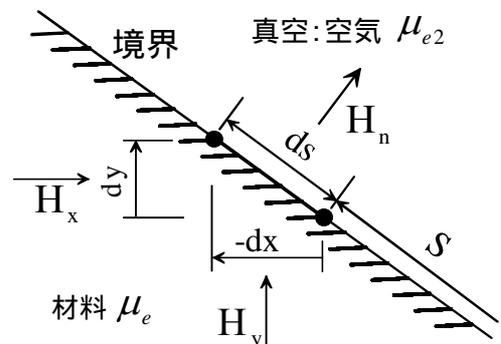


図2 境界上での磁場方向

の連続条件より， $H_n = 0$ となる．ここで，複素磁場関数

$$A(\zeta) = A_1(\zeta) + A_2(\zeta) \quad (4)$$

$$A_2(\zeta) = -H_0 \cdot \omega(\zeta) \cdot e^{-i\delta}$$

式(3)に式(4)を代入してCauchy積分をすると，最終的に次式のように誘導される．

$$A(\zeta) = -H_0 \left(E_0\zeta e^{-i\delta} + \frac{\overline{E_0}}{\zeta} e^{i\delta} + E_{-1} e^{-i\delta} \right) + A_1(\infty) \quad (5)$$

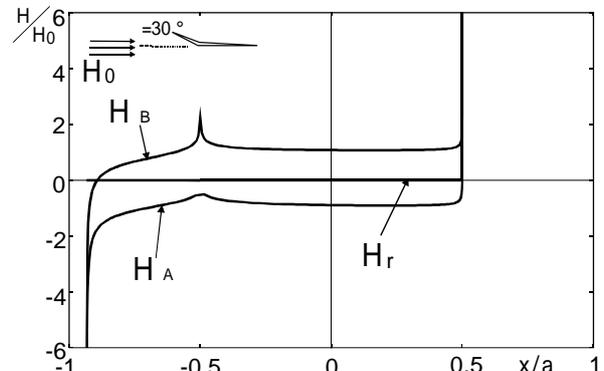


図3 屈折クラックの境界上での磁場分布 ($\delta = 30^\circ$, $\delta = 0^\circ$, $b/a = 0.5$)

キーワード 電磁力，写像関数，外力境界値問題，応力拡大係数，強磁性体
 連絡先 〒466-8555 名古屋市昭和区御器所町 名古屋工業大学 社会開発工学科 Tel.052-735-5482

よって、磁場の強さは次式で表され、

$$a(z) = \alpha(\zeta) = H_x - iH_y = -\frac{A'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} = \frac{H_0 \left(E_0 e^{-i\delta} - \frac{\overline{E_0}}{\zeta^2} e^{i\delta} \right)}{\omega'(\zeta)} \quad (6)$$

次に外力境界条件式は次のように与えられる。

$$i \left[\overline{\omega(\sigma)} \frac{\Phi'(\sigma)}{\omega'(\sigma)} + \overline{\Phi(\sigma)} + \Psi(\sigma) \right] + \frac{i}{2} \mu_e \int \alpha^2(\sigma) \cdot \omega'(\sigma) d\sigma = X - iY = 0 \equiv \overline{H(\sigma)} \quad (7)$$

式(7)に式(1)を代入して一般性を失うことなく単位円上で外力 $0(X = Y = 0)$ として Cauchy 積分をすると $\Phi(\zeta)$ は次式のように誘導される。

$$\Phi(\zeta) = -\sum_{k=1}^{24} \frac{B_k \overline{A_k}}{\zeta_k - \zeta} - \frac{1}{2} \mu_e H_0^2 \overline{E_0} e^{2i\delta} \frac{1}{\zeta} \quad (8) \quad \text{ここで, } B_k = \frac{E_k}{\omega'(\zeta_k')}, A_k = \Phi'(\zeta_k')$$

4. 応力拡大係数

クラック先端での応力拡大係数 K_I, K_{II} 及び、無次元化された応力拡大係数 F_I, F_{II} は、複素応力関数 $\Phi(\zeta)$ と有理写像関数 $\omega(\zeta)$ を用いて次のように表される。

$$K_I - iK_{II} = 2\sqrt{\pi} e^{-i\frac{\lambda}{2}} \frac{\Phi'(\zeta_0)}{\sqrt{\omega''(\zeta_0)}} \quad (9) \quad F_I + iF_{II} = \frac{1}{H_0^2 \cdot \mu_e} \frac{K_I + iK_{II}}{\sqrt{\pi a/2}}$$

(10)

また、エネルギー解放率は次式のように表される。

$$g = \frac{\kappa + 1}{8G} (K_I^2 + K_{II}^2) \quad (11)$$

クラック進展方向では、 $K_I > 0$ の条件のもとで以下のいずれかの条件を満たすクライテリオンを考える。

() K_I が最大となる () $K_{II} = 0$ となる () エネルギー解放率 g が最大となる

式(10)を用いて式(11)の無次元化した g は次式Eで表される。

$$E = F_I^2 + F_{II}^2 \quad (12)$$

5. 考察と結論

図3は磁場方向 $= 0^\circ$, クラック角度 $= 30^\circ$ の場合の屈折クラックの境界上での磁場分布を示す。 H_0 のサフィクスA, Bは、それぞれクラック上面, 下面を意味する。クラック先端では磁場に急激な変化が見られる。図4は $= 0^\circ$, $= 30^\circ$ の場合の境界上での応力分布を示す。クラック先端では応力集中が顕著に見られる。図5は $= 0^\circ$ としてクラック長を固定し、 θ を変化させたとき応力拡大係数の変化を表したものである。 $= 0^\circ$ のとき、 F_I が最大値をとり、 $F_{II} = 0$ であり、Eが最大値をとるので、 $= 0^\circ$ のとき、 $= 0^\circ$ 方向にクラックは進展すると予測できる。また、 θ , α , クラック長のうち1つの値だけを変化させ、それぞれの応力拡大係数に与える影響を解析することができる。また、写像関数を変えることにより任意の形状の解析にも応用できる。

文献[1] N.Hasebe, L.M.Keer, S.Nemat-Nasser “Stress analysis of a kinked crack initiating from a rigid line inclusion” pp.131-145 (1984)

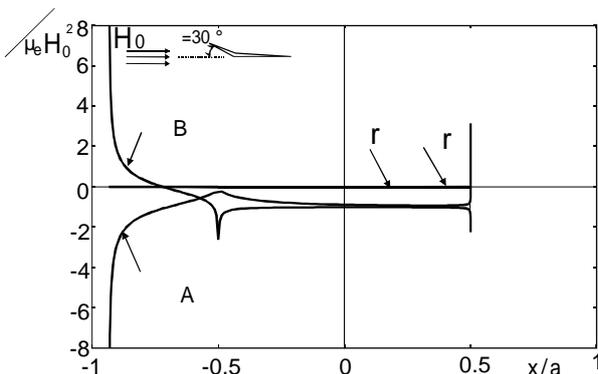


図4 境界上での応力分布
($\theta = 30^\circ$, $\alpha = 0^\circ$, $b/a = 0.5$)

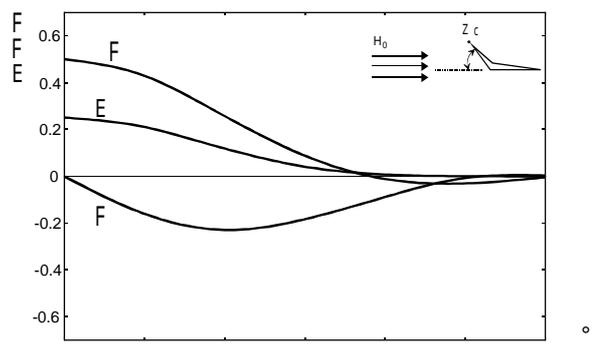


図5 左端Z_c点での応力拡大係数F_c
($\theta = 0^\circ$, $b/a = 0.00503$)