自重を受ける段付き半無限体の応力解析

○名古屋工業大学　学生員　竹野愛
名古屋工業大学　正員　長谷部宣男
名古屋工業大学　正員　王険峰

１．はじめに

本論文では、今までの研究においてあまり解析されてこなかった自重を物体力として考え、それの作用する段付き半無限体の応力解析を平面弾性問題として行う。自重の影響の問題としては、形状の違いによる自重の影響、物体の密度の偏りによる自重の影響などがある。解析方法として、解析形状を単位円に写像する写像関数を用いて応力解析を行う。

２．写像関数

図１に示す、段付き半無限領域（z-plane）を考える。この解析形状の内部領域を単位円（ζ-plane）に等角写像する写像関数は、Schwarz-Christoffel の変換公式より、

$$z = K'\int\left(\zeta-1\right)^{-2}\left(\zeta-e^{\alpha i}\right)^{\lambda}\left(\zeta-e^{\beta i}\right)^{-\lambda}d\zeta \qquad (1)$$

が得られる。ここで最終的に次式の有理写像関数を作る。[1]

$$z=\omega\left(\zeta\right)=\frac{E_0}{1-\zeta}+\sum_{k=1}^{2m+n}\frac{E_k}{\zeta_k-\zeta}+E_c \qquad (2)$$

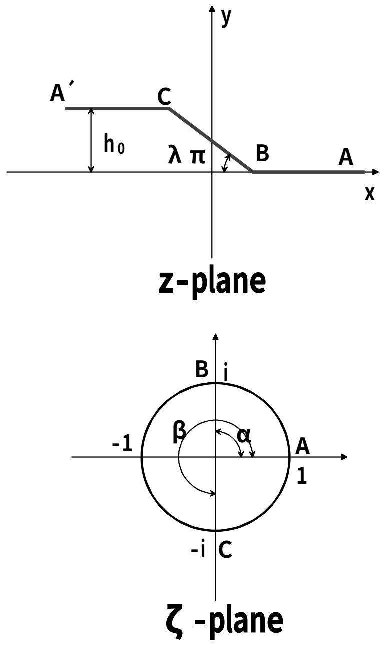

図1 段付き半無限領域と単位円

３．境界条件式

写像関数を導入し、応力関数を$\Phi(\zeta)$、$\Psi(\zeta)$、物体力関数を V として単位円上のζをσとすると境界条件式として

$$\Phi\left(\sigma\right)+\frac{\omega\left(\sigma\right)}{\omega'\left(\sigma\right)}\overline{\Phi'\left(\sigma\right)}+\overline{\Psi\left(\sigma\right)}=i\left(X+iY\right)-\int V\omega'\left(\sigma\right)d\sigma \qquad (3)$$

が得られる。

４．応力関数の誘導

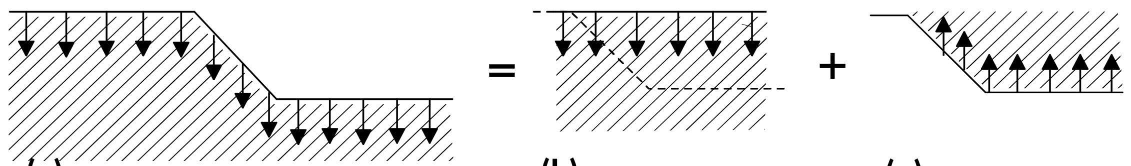

図２ (a) 解析領域　Φ　Ψ　V　(b)　Φ_0　Ψ_0　V_0　(c)　Φ_1　Ψ_1　V_1

図２に示すように、(a)の解を(b)での解と、(c)の解を重ね合わせることにより求める。応力関数、物体力関数をそれぞれ（a）は$\Phi(\zeta)$、$\Psi(\zeta)$、$V(x,y)$、　（b）は$\Phi_0(\zeta)$、$\Psi_0(\zeta)$、$V_0(x,y)$、　（c）は$\Phi_1(\zeta)$、$\Psi_1(\zeta)$、$V_1(x,y)$、　とする。従って、

$\Phi(\zeta)=\Phi_0(\zeta)+\Phi_1(\zeta)$、$\Psi(\zeta)=\Psi_0(\zeta)+\Psi_1(\zeta)$、$V(x,y)=V_0(x,y)+V_1(x,y)$　と表される。よって式（3）は以下のようになる。

$$\Phi_0\left(\sigma\right)+\frac{\omega\left(\sigma\right)}{\omega\left(\sigma\right)}\cdot\overline{\Phi_0'\left(\sigma\right)}+\overline{\Psi_0\left(\sigma\right)}+\Phi_1\left(\sigma\right)+\frac{\omega\left(\sigma\right)}{\omega\left(\sigma\right)}\cdot\overline{\Phi_1'\left(\sigma\right)}+\overline{\Psi_1\left(\sigma\right)}=i\left(X+iY\right)-\int V\omega'\left(\sigma\right)d\sigma \qquad (4)$$

本論文で外力は考えず、また境界上で自重は０であるから式（４）の右辺は０になる。
半平面(b)での境界条件式は次式で表される。

$$\Phi_0\left(\sigma\right)+\frac{\omega\left(\sigma\right)}{\omega\left(\sigma\right)}\cdot\overline{\Phi_0'\left(\sigma\right)}+\overline{\Psi_0\left(\sigma\right)}=i\left(X_0+iY_0\right)-\int V_0\omega'\left(\sigma\right)d\sigma \qquad (5)$$

キーワード：　重力　写像関数　コーシー積分　２次元弾性問題　応力関数
連絡先　：　〒466-8555　名古屋市昭和区御器所町　(Tel　052-732-2111)

ここで、半平面上で左辺の項が０になるので、$i(X_0+iY_0)=\int V_0\omega'(\sigma)d\sigma$ （６） となる。これは、(b)での任意の境界上で外力として$\int V_0\omega'(\sigma)d\sigma$が作用していることを意味する。つまり、(b)の点線上に作用する外力がこれに相当する。(c)の上向きの力はこれを打ち消すように設定しているので、(c)の境界条件式は次式となる。

$$\Phi_1(\sigma)+\frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)}\cdot\overline{\Phi_1'(\sigma)}+\overline{\Psi_1(\sigma)}=-\int V_0\omega'(\sigma)d\sigma \qquad (7)$$

式(７)をコーシー積分して応力関数を求めると次式を得る。

$$\Phi_1(\zeta)=-\sum\frac{\overline{A_k}B_k}{\zeta_k-\zeta}+\frac{i\rho g}{2}\left[\frac{E_{-1}E_0}{2(1-\zeta)}+\sum\frac{E_{-1}E_k}{\zeta_k-\zeta}+\sum E_0E_k\left\{\frac{1}{(\zeta_k-1)^2}\log\left(\frac{\zeta-\zeta_k}{\zeta-1}\right)+\frac{1}{2(1-\zeta_k)(\zeta-1)}\right\}\right.$$

$$+\sum E_0\overline{E_k}\zeta_k'^2\frac{1}{2(1-\zeta_k')(\zeta-1)}+\sum_k\sum_l E_kE_l\left\{\frac{1}{(\zeta_l-\zeta_k)^2}\log\left(\frac{\zeta-\zeta_l}{\zeta-\zeta_k}\right)+\frac{1}{(\zeta_l-\zeta_k)(\zeta-\zeta_l)}\right\}$$

（ $k=l$ のとき $\dfrac{E_k^{\ 2}}{2(\zeta_k-\zeta)^2}$ ）

$$\left.+\sum_k\sum_l\overline{E_k}E_l\zeta_k'^2\left\{\frac{1}{(\zeta_l-\zeta_k')^2}\log\left(\frac{\zeta-\zeta_l}{\zeta-1}\right)+\frac{1}{(\zeta_l-\zeta_k')(\zeta-\zeta_l)}\right\}\right] \qquad (8)$$

応力成分は次のようにΦ_1,Ψ_1,V_0で表される。

$$\sigma_x+\sigma_y=4\mathrm{Re}\left[\frac{\Phi_1'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\right]+2V_0 \quad (9)、\qquad \sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy}=2\left[\overline{\omega(\zeta)}\left(\frac{\Phi_1'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\right)'\frac{1}{\omega'(\zeta)}+\frac{\Psi_1'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\right] \quad (10)$$

５．解析結果

図３は境界線上の応力分布(case1 とする)、図４は x 軸(x<0)上の応力分布(case2 とする)、図５は C 点を通る鉛直線上の応力分布(case3 とする)である。それぞれのケースで傾斜の勾配λπ、段の高さh_0を変化させて解析を行った。 応力の大きさは case1，２では x 軸、case３では C 点を通る鉛直線からの距離で表す。

case1 でσ_r（境界線の法線方向の応力），σ_{rs}（せん断応力）は境界条件を満たして０になる。σ_s（境界線の接線方向応力）は角度を上げていくごとに B 点での応力集中が顕著になってくる。

case2 では、B 点でのσ_x（x 軸方向応力）、σ_y（y 軸方向応力）、σ_{xy}（せん断応力）の応力集中が目立ってくる。

case3 では、角度に無関係に同じような分布を示した。

角度を固定して、段の高さを変えた解析を行ってみたところ、全てのケースで応力は高さに比例して増大することがわかった。

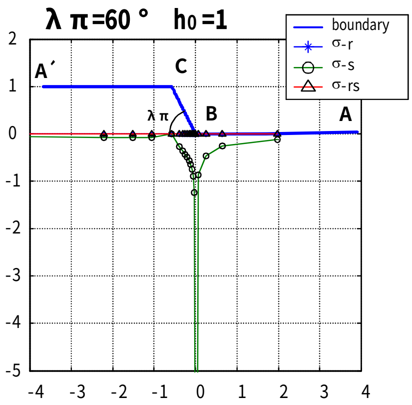

図３ 境界上の応力分布

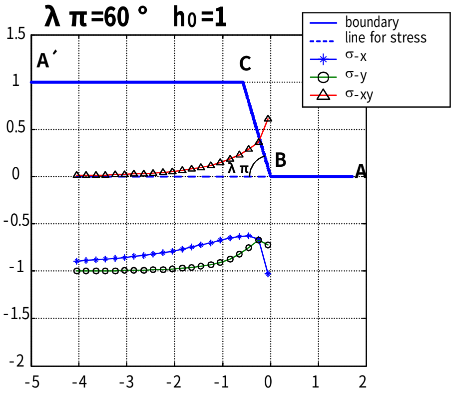

図４ x軸上の応力分布

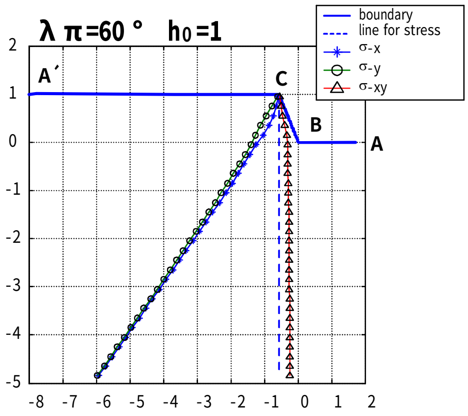

図５ C点を通る鉛直線上の応力分布

６．まとめ

自重の作用する段付き半無限体の応力解析を行った。段の角度や高さを変化させ、応力分布を調べた。自重を考慮することは、形状が複雑化し応力集中ヶ所が存在すると、より重要になると言える。

参考文献 ［１］ 長谷部宣男 「応力集中の現象解明と応力解析」（博士論文）1974