

薄肉曲げ圧縮部材の横ねじれ座屈を支配する Timoshenko はり形増分状態方程式

東京理科大学 学生員 岡田康志

東京理科大学 正会員 白木恒雄

1. はじめに

ここに薄肉はりの二次せん断変形を Timoshenko はり形に考慮した理論を構成した。薄肉断面を構成する各板ごとに直線分布の断面反りを導入し、軸伸縮、二軸方向曲げおよびねじり変形を総合的に含む有限変位理論となる。単位反り関数をすべて直交化することにより従来の微小変位理論の展開を踏襲したものとなっている。作成された増分状態方程式の副対角線交代対称性、およびせん断剛性無限大時の Bernoulli/Euler(以下、B/E と略す)はりへの移行特性より新理論の正当性を確認した。この新理論により、部材長さの比較的短いけたの大きな変形挙動もその適用範囲内で扱うことが可能となる。単純支持はりおよび張り出しはりの座屈荷重を計算し、Timoshenko の著書等で述べられている座屈係数と比較した。

2. 増分状態方程式の誘導

Timoshenko はり形に扱うため、軸方向変位は、初等せん断ひずみのみによる軸方向変位を二次せん断ひずみにより補正した値となっている。二次せん断ひずみを考慮した軸方向変位関数の式は、まず、二次せん断ひずみの影響を無視した軸方向関数を誘導し、その結果から二次せん断ひずみの影響を考慮した式をもとめた。支配方程式の誘導の際には、変位、ひずみ、および二次せん断ひずみの等価性式を Reissner の変分原理に代入し、面内関数の直交性を用いて、境界条件式(1)(2)とつり合い方程式を得る。ここで得られた境界条件より新たな断面力導入し、変位成分で表現すると、(3)(4)式となる。

$$[\delta \vartheta (\mathcal{M} - \overline{\mathcal{M}})] = 0 \quad (1) \quad \mathcal{M} = -E \Phi^T F (\Phi \vartheta)' + E \Phi^T F \Phi d \quad (3)$$

$$[\delta v (\mathcal{Q} - \overline{\mathcal{Q}})] = 0 \quad (2) \quad \mathcal{Q} = q_{pr} + GA \Phi^T k \Phi \left(\frac{dv}{dx} - \vartheta \right) + C_M \mathcal{M} \quad (4)$$

新たに導入したこの断面力(3)(4)を使って、前出のモーメントおよびせん断力のつり合い方程式を書き直すと、以下のごとく表せる。

$$\mathcal{M}' - \mathcal{Q} + C_1 \mathcal{M} + q_{pr} + \Phi^T \int_A p_x w dA = 0 \quad (5)$$

$$\mathcal{Q}' - C_2 \mathcal{M} - C_3 \mathcal{M}' + \varphi^T \int_{\Gamma} p_Q \tilde{r} ds + \varphi^T \overline{\varphi} V'^T \overline{\Phi}^T \int_A p_x w dA = 0 \quad (6)$$

さらに、分岐現象を解くため、支配方程式(5),(6)を増分形に直すことで分岐直後のつり合い状態方程式を得る。このとき、増分状態方程式は、対応する変位と力の状態量を鏡像に配置すると、下の図で示すごとく副対角線に石畳対称となる。

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} v(x) \\ \vdots \\ \vartheta(x) \\ \vdots \\ \mathcal{M}(x) \\ \vdots \\ \mathcal{Q}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K^{-1}D & \vdots & I - K^{-1}C & \vdots & -K^{-1}B & \vdots & -K^{-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ H - B'K^{-1}D & \vdots & B'(I - K^{-1}C) & \vdots & -S - B'K^{-1}B & \vdots & B'K^{-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -(N - C'K^{-1}D) & \vdots & -(C+M) + C'K^{-1}C & \vdots & -(I - C'K^{-1})B & \vdots & I - C'K^{-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ M'H + \Gamma'(D - N) - D'K^{-1}D & \vdots & N' - D'K^{-1}C & \vdots & H' - D'K^{-1}B & \vdots & D'K^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(x) \\ \vdots \\ \vartheta(x) \\ \vdots \\ \mathcal{M}(x) \\ \vdots \\ \mathcal{Q}(x) \end{bmatrix} \quad (7)$$

さらに、Timoshenko 形のせん断剛性を無限大にもってゆくと、(7)式中のせん断剛性を含むマトリクス K^{-1} と、せん断ひずみのマトリクス F が零となり、(8)式の B/E はりの状態方程式を得る。

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} v(x) \\ \vdots \\ \vartheta(x) \\ \vdots \\ \mathcal{M}(x) \\ \vdots \\ \mathcal{Q}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \vdots & I & \vdots & 0 & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ H & \vdots & B' & \vdots & -S & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -N & \vdots & -(C+M) & \vdots & -B & \vdots & I \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ M'H & \vdots & N' & \vdots & H' & \vdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(x) \\ \vdots \\ \vartheta(x) \\ \vdots \\ \mathcal{M}(x) \\ \vdots \\ \mathcal{Q}(x) \end{bmatrix} \quad (8)$$

3. 横倒れ座屈解析例

(1) 等曲げを受ける単純 I 桁

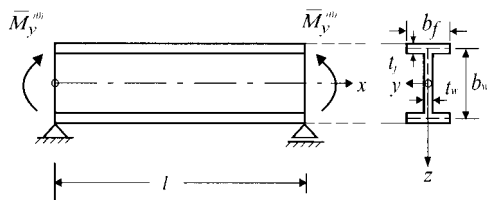


図-1

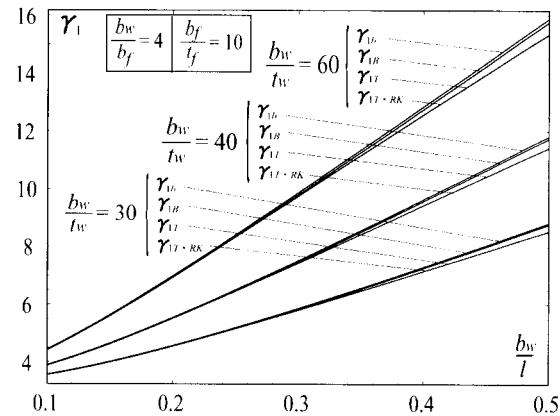


図-2

二軸対称の I 形断面形をもつ両端単純支持はりが両端に y 軸まわりの曲げモーメントを受けた場合（図-1）の、座屈モーメントを計算した。構造系の境界条件を考慮した増分形のつりあい方程式と断面力増分の式より変位表示の支配方程式を求める。この式を変位仮定法(Ritz 法)により解き、以下の座屈曲げモーメントの式が求まる。

$$\bar{M}_y^{(0)} = \frac{\gamma_{1T}}{l} \sqrt{EI_{yy} GJ_T} \quad (9)$$

$$\gamma_{1T} = c_s \pi \sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \frac{EF_{TT}}{GJ_T} \left(1 - \frac{F_{yy}}{F_{zz}}\right)^{-\frac{1}{2}}} \quad (10)$$

ただし、

$$c_s = \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \frac{EF_{TT}}{GJ_T} \left(1 + \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \frac{EF_{TT}}{GJ_T}\right)^{-1}}{\left[1 + \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \frac{EF_{TT}}{GJ_T}\right] \left[1 + \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \frac{EF_{yy}}{GJ_T} \left(1 - \frac{F_{yy}}{F_{zz}}\right)^{-1}\right]}} \quad (11)$$

$$\gamma_{1b} = \pi \sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \frac{EF_{TT}}{GJ_T}} \quad (12)$$

$$\gamma_{1B} = \pi \sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \frac{EF_{TT}}{GJ_T} \left(1 - \frac{F_{yy}}{F_{zz}}\right)^{-\frac{1}{2}}} \quad (13)$$

(9)式中の座屈係数 γ_{1T} は、係数により本報告の主題であるせん断変形の影響を表している。(9)の式中にある座屈係数には、座屈前の変形を考慮しない B/E はりに相当する文献 1) の γ_{1b} 、および座屈前の変形を考慮する B/E はりに相当する文献 2) の γ_{1B} がある。部材長 l と部材高さ b_w の比 b_w/l と座屈係数の関係を調べた。 b_w/t_w を 30, 40, 60 の 3 種類について座屈係数を計算し、図-2 のごとくになった。数値解法として、Runge-kutta 伝達マトリクスによる本理論の横倒れ座屈を計算し、 $\gamma_{1T \cdot RK}$ を図-2 中に与えた。閉じた解と数値解は完全に一致している。せん断変形の影響は、 b_w/l が 0.4 位から差が目立ちはじめ、 $b_w/l=0.5$ で約 3% 程度の値の差となった。

(2) 先端集中荷重を受ける張り出し I 桁

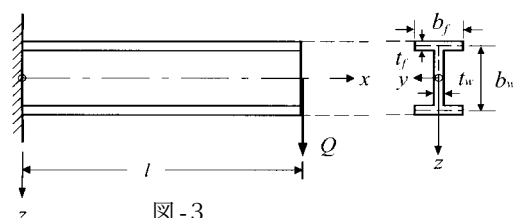


図-3

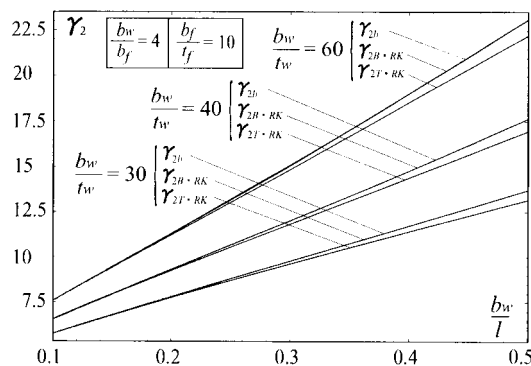


図-4

二軸対称の I 形断面をもつ張り出しはり先端に z 軸方向の横荷重を受けた場合(図-3)の座屈荷重を求めた。前出の単純支持けたの断面に対して同様の計算を行い、座屈横荷重を求めた。

$$\bar{Q}_z^{(0)} = \frac{\gamma_2}{l^2} \sqrt{EI_{yy} GJ_T} \quad (14)$$

本理論の数値解法(Rung-Kutta 伝達マトリクス法)の座屈係数 $\gamma_{2T \cdot RK}$ 、座屈前の変形を考慮しない B/E はりの文献 1) 中の 4 階常微分方程式の級数解による得られる座屈係数 γ_{2b} 、そして座屈前の変形を考慮する B/E はりの数値解法(Rung-Kutta 伝達マトリクス法)の座屈係数 $\gamma_{2B \cdot RK}$ を図-4 に与えた。B/E はりの級数解と数値解は完全に一致している。Timoshenko はり形のせん断変形の影響は、 b_w/l が 0.3 位から差が目立ちはじめ、 $b_w/l=0.5$ で約 5% 程度の値の差となった。

[参考文献]

- 1) Timoshenko, S.P. and Gere, J.M.: Theory of Elastic Stability, McGraw-Hill, 1961
- 2) 西野文雄・他：軸力と曲げおよびねじれを受ける薄肉断面部材、土木学会論文報告集、No225, pp.1-15, 1974