

非繰り返し型の方法による弾性骨組構造物の逆解析

東洋大学大学院* 学生員 柳田 応樹
 東洋大学大学院* 正会員 新延 泰生
 東洋大学大学院* 学生員 樋口幸太郎

1. はじめに

本研究は、任意の荷重に対して全自由度の変位が得られる場合に骨組構造物の各部材の剛性を推定する逆解析問題を考える。解析は、まず初期値として任意の剛性に対する節点変位の感度係数を求め、感度係数特性式を直接用いることにより、反復計算をすることなく与えられた全自由度の測定変位に対する部材剛性を求めるものである。なお、この考え方は解析領域の全自由度に対する変位などの応答が与えられる逆解析問題に適用が可能である。

2. 定式化について

全要素を合成した剛性方程式

$$\{F\} = [K]\{\delta\} \quad (1)$$

$\{F\}$: 荷重ベクトル

$[K]$: 全体剛性マトリクス

$\{\delta\}$: 節点変位ベクトル

感度変数は、部材剛性 K_i (断面積 A_i , 断面二次モーメント I_i など) とし、式(1)の両辺を X_i で偏微分すると式(2)が得られる。
 (i は要素番号を示す。)

$$\left\{ \frac{\partial K}{\partial X_i} \right\} \{\delta\} + [K] \left\{ \frac{\partial \delta}{\partial X_i} \right\} = \left\{ \frac{\partial F}{\partial X_i} \right\} \quad (2)$$

ここで、荷重ベクトル $\{F\}$ は、感度変数ベクトル $\{X_i\}$ の関数ではないとすると、 $\{\partial F / \partial X_i\} = 0$ となり、式(2)を整理すると以下ようになる。

$$\left\{ \frac{\partial \delta}{\partial X_i} \right\} = -[K]^{-1} \left\{ \frac{\partial K}{\partial X_i} \right\} \{\delta\} \quad (3)$$

式(3)の左辺は i 部材の感度変数 X_i の微小変動に対する各変位の変動量を示すものであり、 i 部材の感度変数 X_i に対する各変位の感度係数を示している。感度変数ベクトルを断面積 $\{A_i\}$ とし、式(3)の両辺に $\{A_i\}$ を乗じ、 i について1から m までの総和について考えると式(4)のようになる。

$$\begin{aligned} \sum_i^m \frac{\partial \delta}{\partial A_i} A_i &= -[K]^{-1} \sum_i^m \left[\frac{\partial K}{\partial A_i} \right] A_i \{\delta\} \\ &= -[K]^{-1} [K] \{\delta\} \\ &= -\{\delta\} \end{aligned} \quad (4)$$

式(4)は感度係数 $\{\partial \delta / \partial X_i\}$ に感度変数 X_i を乗じ骨組全体の総和をとると、応答変位に -1 を乗じた値になることを示し、この関係式を感度係数特性式と呼んでいる。

式(4)の $\{\partial \delta / \partial X_i\}$ の部分に式(3)を代入すると、

$$\sum_i \left\{ -K^{-1} \frac{\partial K}{\partial A_i} \delta \right\} A_i = -\delta_j \quad (5)$$

式(5)の左辺の全体剛性マトリクス K を初期値における全体剛性マトリクス K_0 、左辺の δ を測定変位 $\bar{\delta}$ 、右辺の δ を初期値における変位 δ_{0j} とおくと、

$$\sum_i \left\{ -K_0^{-1} \frac{\partial K}{\partial A_i} \bar{\delta} \right\} A_i = -\delta_{0j} \quad (6)$$

式(6)から繰り返し計算を行わずに部材剛性が求められる。測定変位数が未知数より大きい場合は、最小二乗法を用いて部材剛性を求めることになる。

3. 解析モデル

【解析モデル①】

Fig-1 に示す自由度の数と部材数が等しい8部材の静定の塔をモデルとした。まず求めたい断面積(全部材0.01m²)において順解析を行い、既知となる測定変位 $\bar{\delta}$ を求め、次に任意の断面積(初期値として全部材0.05m²とした)の K_0 、 δ_{0j} 、測定変位に対する感度係数を求め、式(6)に基づき逆解析を行った。($E=2.059 \times 10^{11}$ (N/m²) で各部材共通)

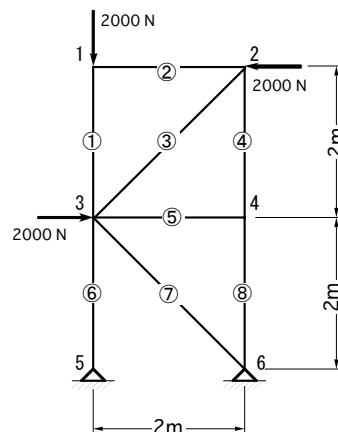


Fig-1

【解析結果】

	測定変位(m)
u_1	-1.33E-05
v_1	-3.89E-06
u_2	-1.33E-05
v_2	3.89E-06
u_3	-1.94E-06
v_3	-1.94E-06
u_4	-1.94E-06
v_4	1.94E-06

逆解析



	逆解析値(m ²)
部材①	0.01
部材②	0.01
部材③	0.01
部材④	0.01
部材⑤	0.01
部材⑥	0.01
部材⑦	0.01
部材⑧	0.01

キーワード：逆解析，骨組構造物，感度解析，非繰り返し法

* 東洋大学 大学院工学研究科 構造システム研究室 〒350-0815 埼玉県川越市鯨井 2100 TEL：0492-39-1391 FAX：0492-31-4482

【解析モデル②】

Fig-1と同様の8部材静定モデルの塔について、ある任意の部材の剛性（断面積）が分かっている場合（未知数減少）、最小二乗法を用いて逆解析を行った。解析は、部材④の断面積を既知（ 0.01m^2 ）とし、部材④以外の断面積（ 0.01m^2 ）を推定した。

【解法】

5部材の骨組構造物で自由度が5つのモデルの場合について考えてみると、式(7)のように、感度係数は5行5列、初期変位は1行5列で表される。

$$\begin{bmatrix} X_{11} & \cdots & X_{15} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{51} & \cdots & X_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_{11} \\ \vdots \\ Y_{51} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

定式化で述べた式(6)より、

$$\begin{bmatrix} X_{11} & \cdots & X_{15} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{51} & \cdots & X_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Y_{11} \\ \vdots \\ Y_{51} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

A_1 の断面積が分かっている場合、 A_1 に対する感度係数の行列（5行1列）に A_1 を乗じて先に計算する。

$$\begin{bmatrix} X_{11} \\ \vdots \\ X_{51} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_{11} \times A_1 \\ \vdots \\ X_{51} \times A_1 \end{Bmatrix} \quad (9)$$

式(8)の右辺の行列から式(9)を引くと次のような関係式になる。

$$\begin{bmatrix} X_{12} & \cdots & X_{15} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{52} & \cdots & X_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_2 \\ \vdots \\ A_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Y_{11} - X_{11} \times A_1 \\ \vdots \\ Y_{51} - X_{51} \times A_1 \end{Bmatrix} \quad (10)$$

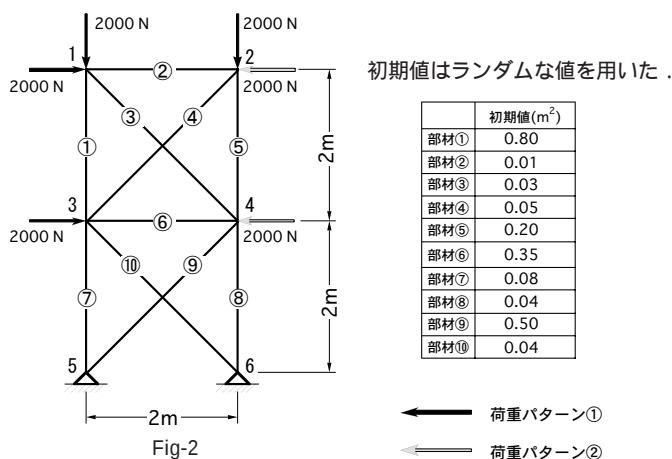
式(10)に最小二乗法を適用し、各部材の断面積を推定した。

【解析結果】

	測定変位(m)		逆解析値(m^2)
u_1	-1.33E-05	部材①	0.01
v_1	-3.89E-06	部材②	0.01
u_2	-1.33E-05	部材③	0.01
v_2	3.89E-06	部材④	—
u_3	-1.94E-06	部材⑤	0.01
v_3	-1.94E-06	部材⑥	0.01
u_4	-1.94E-06	部材⑦	0.01
v_4	1.94E-06	部材⑧	0.01

【解析モデル③】

Fig-2に示すような自由度数より未知数の方が大きい10部材の2次不静定モデルの塔について、2パターンの荷重状態の測定変位 $\bar{\delta}_1, \bar{\delta}_2$ と初期変位 $\delta_{0,1}, \delta_{0,2}$ 、測定変位に対する感度係数を求め、縦方向に重ね縦長の行列を作成し、最小二乗法を用いて逆解析を行った。（部材①～⑧までは 0.01m^2 、部材⑨～⑩は 0.02m^2 、 $E=2.059 \times 10^{11}(\text{N/m}^2)$ で各部材共通）



【解析結果】

	測定変位1(m)	測定変位2(m)		逆解析値(m^2)
u_1	1.54E-05	-1.62E-05	部材①	0.01
v_1	2.13E-06	-4.66E-06	部材②	0.01
u_2	1.49E-05	-1.70E-05	部材③	0.01
v_2	-4.98E-06	3.11E-06	部材④	0.01
u_3	6.18E-06	-6.65E-06	部材⑤	0.01
v_3	2.56E-06	-3.89E-06	部材⑥	0.01
u_4	6.36E-06	-7.42E-06	部材⑦	0.01
v_4	-2.61E-06	1.94E-06	部材⑧	0.01
			部材⑨	0.02
			部材⑩	0.02

【解析モデル④】

Fig-2と同様の10部材の2次不静定モデルの塔について、測定変位に $\pm 1\%$ の範囲内で乱数による誤差を発生させた場合について、モデル③同様、最小二乗法を用い解析を行った。なお解析は100回行った。

【解析結果】

	下限値(m^2)	上限値(m^2)	平均値(m^2)
部材①	0.004763	0.018672	0.010560
部材②	0.009042	0.011214	0.010109
部材③	0.009351	0.010590	0.009978
部材④	0.009205	0.010832	0.010017
部材⑤	0.008307	0.011592	0.010011
部材⑥	0.006160	0.013818	0.010031
部材⑦	0.009237	0.010704	0.009992
部材⑧	0.008842	0.011373	0.010026
部材⑨	0.018889	0.021302	0.020015
部材⑩	0.018083	0.021764	0.019981

4. おわりに

解析結果より、感度係数特性式を直接用いることにより、繰り返し計算をすることなく、任意の初期値によって測定変位に対する構造物の剛性を求めることが可能であることが証明された。

また未知数が減少した場合や不静定モデル等の場合も、最小二乗法を用いて解析を行えば未知である剛性を求めることが可能である。

測定変位に誤差が含まれる場合、誤差の範囲がより小さければ上限値・下限値の範囲も狭くなり、平均値も正解値に近づくが、誤差が大きいと負の断面積が求められる場合もある。