

光弾性の原理に基づく三次元応力場計測手法の開発

東京大学地震研究所 正会員 ○小国 健二

東京大学大学院 学生員 Wijerathne Lalith

東京大学地震研究所 正会員 堀 宗朗

1. 背景と目的

地震断層挙動・構造物の破壊時の挙動の予測といった破壊にまつわる問題を考える際に、未解決かつ重要な力学現象のひとつとして三次元的な亀裂の不安定な進展（特に圧縮応力下での進展）が挙げられる。この力学現象の支配メカニズム解明のためには、少なくとも亀裂周辺の応力状態を計測する必要がある。ただし、従来から材料の力学的挙動の計測に用いられてきた「平均場の計測」、あるいは「局所的計測」はここでは役に立たない。不安定に進展（移動）する亀裂端を追跡しながらその近傍での応力場を計測するためには「供試体全体の物理量の分布の計測」を高い空間分解能で行う「全視野計測」が必要となる。

このような背景のもと、本研究では亀裂の不安定な進展の可視化と破壊進展に伴い変化する応力分布の全視野計測を最終的な目的とし、光弾性の原理に基づく三次元応力場計測（三次元光弾性）のための逆解析手法を開発・提案する。なお、光弾性現象とは高分子・ガラスなど光弾性物質と呼ばれる材料において材料内部に応力が生じると、その応力場と線形関係で結ばれる複屈折場が発生する現象である。光弾性の原理を用いた応力解析では、材料を透過する偏光をプローブとして複屈折場に関する情報を計測し、これを入力とした逆解析により材料内部の応力場を同定する。

2. 理論と定式化

任意の三次元的応力状態にある媒体中を通過する光線（三次元光弾性における応力場のプローブ）の偏光状態は、支配方程式

$$\frac{d\mathbf{A}}{dz} = \mathbf{G}\mathbf{A} \quad (1)$$

に従って変化する。ここで z は光線の進行方向、 $\mathbf{A} = (A_x, A_y)^T$ は z 軸に垂直な xy 平面上での光ベクトル、 $\mathbf{G}$ は媒体中の応力場の xy 平面上への射影を成分として持つ 2×2 の対称行列である。三次元光弾性は未知の $\mathbf{G}$ （媒体内部の応力状態）を透過光 $\mathbf{A}$ に関する計測データから同定するという逆問題となる。この問題は応力場の射影（ベクトル場）から媒体内部の応力場を再構築する問題、テンソル場のトモグラフィーである。

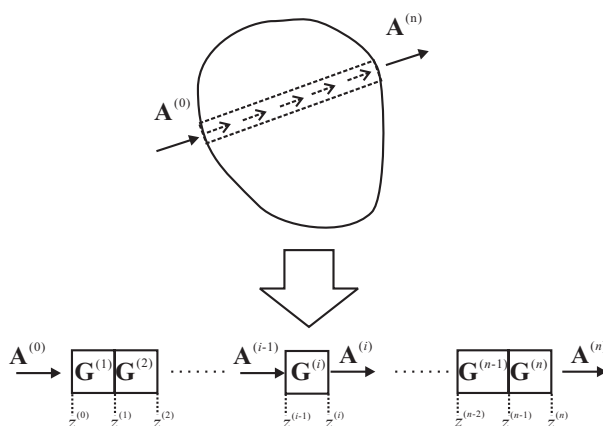


図1：離散化された媒体中を通過する光線

このとき、媒体を透過した光線と媒体内部の応力状態は非線形関係で結ばれる。この非線形性を明示するために、図1に示すように媒体中を通過する光線の経路を離散化して考える。光線の経路は各要素内で一定の応力状態にある n 個の要素に分割され、 i 番目の要素の複屈折場を表す行列は $\mathbf{G}^{(i)}$ 、入射光・透過光はそれぞれ $\mathbf{A}^{(i-1)}$ 、 $\mathbf{A}^{(i)}$ と表される。式(1)から、媒体からの透過光 $\mathbf{A}^{(n)}$ は、

$$\mathbf{A}^{(n)} = \mathbf{H}^{(n)} \mathbf{H}^{(n-1)} \dots \mathbf{H}^{(2)} \mathbf{H}^{(1)} \mathbf{A}^{(0)} \quad (2)$$

となる。ここで $\mathbf{H}^{(i)} = \mathbf{I} + \mathbf{G}^{(i)}(z^{(i)} - z^{(i-1)})$ 、 $\mathbf{I}$ は 2×2 の単位行列である。式(2)の非可換な行列の積が三次元光弾性（テンソル場トモグラフィー）が本質的に非線形問題になる理由である。

キーワード：光弾性，三次元応力場，テンソル場トモグラフィー，非線形逆解析

連絡先：〒113-0032 東京都文京区弥生 1-1-1 東京大学地震研究所 TEL/FAX: 03-5841-5692

本研究では、式(2)の増分型の考慮による線形化を用いて三次元光弾性の問題の本質である非線形性を克服することを目指す。ここで考慮される増分は、媒体に与えられる微小な荷重増分に対する変化量である。各荷重ステップにおける応力増分を積み上げていくことにより任意の三次元的応力場に至る媒体内の応力場の履歴を得ることができる。式(2)の増分型は以下のように表される。

$$\dot{\mathbf{A}}^{(n)} = \left\{ \left(\dot{\mathbf{H}}^{(n)} \mathbf{H}^{(n-1)} \dots \mathbf{H}^{(1)} \right) + \left(\mathbf{H}^{(n)} \dot{\mathbf{H}}^{(n-1)} \mathbf{H}^{(n-2)} \dots \mathbf{H}^{(1)} \right) + \dots + \left(\mathbf{H}^{(n)} \dots \mathbf{H}^{(2)} \dot{\mathbf{H}}^{(1)} \right) \right\} \mathbf{A}^{(0)} \quad (3)$$

式(3)において $\dot{\mathbf{H}}^{(i)}$ は i 番目の要素内の未知の応力増分 $\dot{\sigma}^{(i)}$ の線形和を成分として持つ 2×2 の対称行列である。いま、増分前の応力状態は既知という前提に立っているため、すべての $\mathbf{H}^{(i)}$ は既知である。従って、透過光の増分 $\dot{\mathbf{A}}^{(n)}$ は各要素の未知の応力増分の線形和の形で表される。微小な荷重ステップでの透過光の変化 $\dot{\mathbf{A}}^{(n)}$ を十分多数の方向から計測することにより、各要素での応力増分 $\dot{\sigma}^{(i)}$ を未知数とする線形方程式を立てることができる。

3. 数値解析

本研究で提案する手法では荷重増分前の応力状態 σ に微小な応力増分 $\Delta\sigma$ が積み上げられる。この $\Delta\sigma$ は、増分前の応力状態 σ と、計測される透過光の情報を入力とし、下に示すアルゴリズムに基づいて計算される。

(i) 初期値: $\sigma^{[0]} = \sigma$, $\Delta\sigma^{[0]} = 0$

(ii) $\sigma^{[k+1]} = \sigma^{[k]} + \Delta\sigma^{[k]}$, $\Delta\sigma^{[k+1]} = \mathbf{M}(\sigma^{[k]})\Delta\alpha$

ここで $[]$ 内の k はイタレーション・ステップ数を表す。 $\Delta\alpha$, $\mathbf{M}(\sigma^{[k]})$ はそれぞれ、多数の方向から計測された透過光の増分から作られるベクトルと、前述の線形方程式における応力増分の係数行列の逆行列である。

(ii) を $\Delta\sigma^{[k+1]} \rightarrow 0$ になるまで繰り返す。

(iii) $\sigma = \sigma^{[k]}$ (増分後の応力場に到達)

例題として、図2に示す離散化された円柱状の物体(63個の六面体要素)に2つの応力場を定義し、それぞれを荷重増分前・増分後の応力場とみなす。ここで、応力場は各要素に6つの応力成分をランダムに与えることにより定義される。また、荷重増分後の応力状態は逆解析により求めるべき解であり、透過光を計算するためにのみ用いられる。この設定の下、i) 荷重増分前の応力状態・透過光、ii) 荷重増分後の透過光(応力状態は未知)、を入力データとした逆解析により各要素での応力増分 $\dot{\sigma}^{(i)}$ を、ひいては荷重増分後の応力場を同定する。

図3に、前述のアルゴリズムに基づくイタレーションの過程での応力増分の収束の様子を示す。 $\Delta\sigma$ の正解と各イタレーション・ステップまでに累積された $\Delta\sigma^{[k]}$ との差を応力増分の最大値で除した相対誤差をプロットしたものである。8番目のイタレーションで $\Delta\sigma$ は8桁の相対誤差まで低減し、アップデートされた応力状態は荷重増分後のそれに収束している。この結果は、荷重増分を十分小さくすれば三次元光弾性による応力場の履歴の逆解析が可能であることを示している。

参考文献 ・Aben, H., Integrated Photoelasticity, McGraw-Hill, New York, 1979

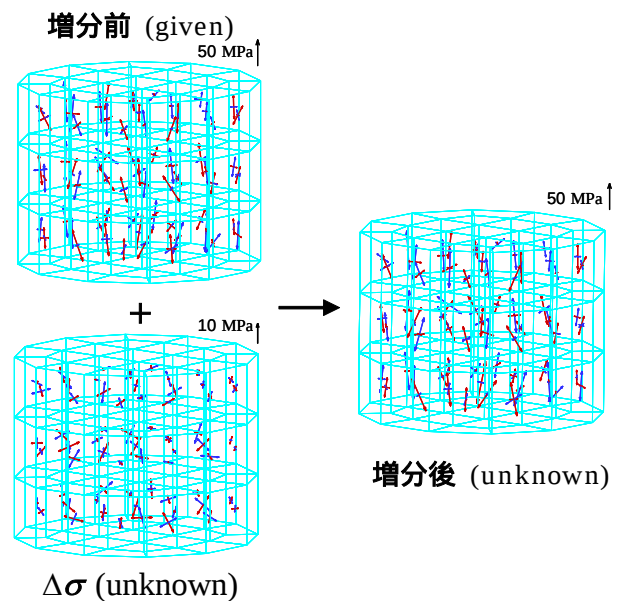


図2 解析対象：荷重増分前後の応力場

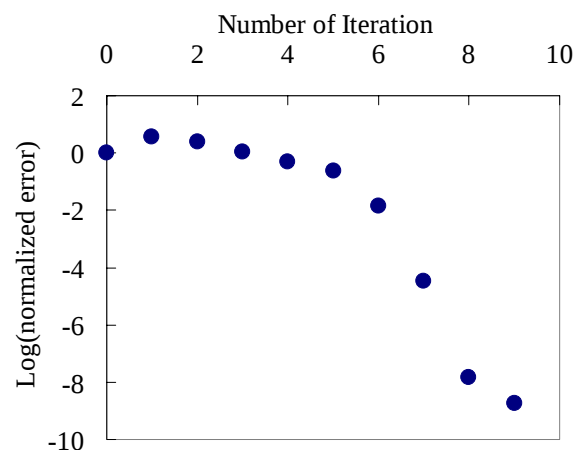


図3 解(応力増分 $\Delta\sigma$) の収束