

# 幾何学的非線形・材料非線形解析アルゴリズムのエネルギー論的考察

佐賀大学      ○学生会員      原田 俊幸      佐賀大学      正会員      井嶋 克志  
 佐賀大学      正会員      帯屋 洋之      佐賀大学      正会員      川崎 徳明

## 1. まえがき

材料非線形を伴う解析において、要素端力と要素変形間の非線形性は不平衡力の算定に用いるものの、接線もしくは割線剛性を使用した増分解析により解を算出するのが一般的である。しかしながら、不静定構造物の変形や部材力は部材間の剛比により規定されるため、前平衡状態は増分外力による平衡状態に影響を与える可能性があり、外力の増分幅が解に影響することが考えられる。さらに重要なことは、厳密な材料非線形性を考慮したひずみエネルギーと割線剛性によるひずみエネルギーは異なるから、このエネルギーの差異が解の精度に影響する可能性もある。

本解析では、幾何学的非線形・材料非線形を考慮した 3 次元骨組構造解析として、大きな外力増分に対しても解を算出するアルゴリズムを開発し、分岐のない釣合経路上において、明らかにひずみエネルギーに差異が生じる外力増分幅に対する解の精度を検討したものである。さらに、本解析から解析アルゴリズムをエネルギー論的に考察している。

## 2. 解析アルゴリズムとひずみエネルギー

解析アルゴリズムは次の通りである。まず、既知平衡状態における接線ヤング率を求め、接線幾何剛性マトリクスを用いて増分外力に対して材料剛性一定のもとに幾何学的非線形の反復計算から収束解を求める。この収束解から厳密に材料非線形を考慮した不平衡力を算出し、許容不平衡力を超えている場合、既知平衡状態と現収束解における応力・ひずみ関係より割線ヤング率を求める。このヤング率一定のもとに再度幾何学的非線形の反復計算を行い、この収束解に対しても厳密な材料非線形性のもとに不平衡力を算定する。材料非線形に基づく不平衡力が許容値を下回るまで、この手順を繰り返す。

この解析アルゴリズムに対して、図-1 に示すひずみエネルギー上の疑問が生じる。図-1 は、第 4 象限を厳密な適合条件式、第 3 象限を厳密な材料非線形に基づく要素端力式と平衡状態からの割線要素端力式、第 2 象限を平衡条件式とする。第 1 象限は節点力と節点変位関係を表す。初期平衡状態を P-X-Q-R-S-T-P に示されるループとし、P'の節点力による平衡状態を求めるものとする。図は 2 段階に節点力を増分させた場合と、一挙に与えた場合について示しており、どちらの場合でも平衡解が一致すれば、図のように表すことができる。

全ポテンシャルエネルギーは、平衡解からの増分に

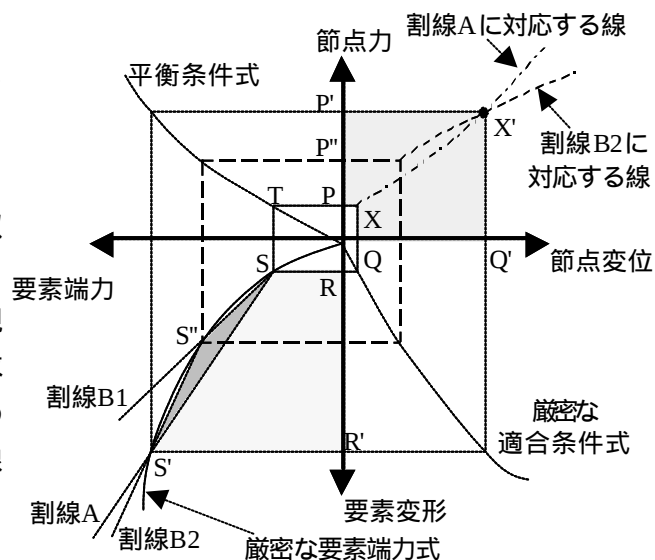


図-1 ひずみエネルギーと全ポテンシャルエネルギー  
概念図

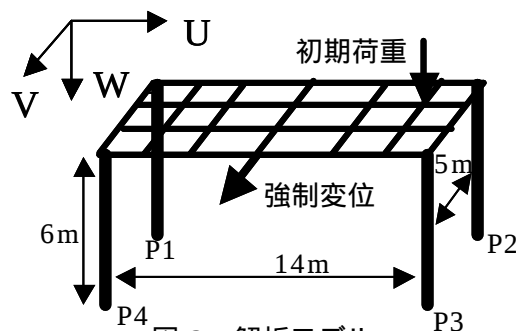


図-2 解析モデル

キーワード：幾何学的非線形 材料非線形 解析アルゴリズム エネルギー原理

\*\*〒840-8502 佐賀市本庄町 1 番地 佐賀大学理工学部都市工学科 TEL 0952-28-8578

ついて考えればよいから、外力が一挙に与えられた場合、ひずみエネルギーは図中の第3象限の  $S-R-R'-S'-S$  で囲まれた面積となる。このときの外力のポテンシャルエネルギーは第1象限  $P-P'-X'-Q'-Q-X-P$  で囲まれた面積となる。一方、外力を2段階に分けて载荷した場合、ひずみエネルギーは  $S-R-R'-S'-S''-S$  によって囲まれた面積となり、一括载荷に比べて  $S-S''-S'-S$  の面積だけ異なることになる。この面積が節点変位に対して定数であれば全ポテンシャルエネルギー停留の原理から得られる平衡状態に影響を与えることなく、外力の増分幅の影響は受けないと考えられる。しかし、図を参照すればこの三角形の面積は節点変位に依存するとししか考えられない。この場合、平衡状態は外力の増分の影響を受け第1象限の点  $X'$  において、2つの割線に対応した節点力・節点変位関係の曲線は一致しないと考えられる。

### 3. 解析モデルと解析結果

図-2 は本研究で解析を行ったモデルであり、RC 4 脚高架橋として偏心初期荷重のもとに水平強制変位を与えて計算を行った。図-3 は一方向に 15cm まで 0.1mm、1.0cm、10.0cm 刻みの強制変位による結果である。図-4 は崩壊に至るまで 1.0cm、10.0cm 刻みの強制変位による結果である。図-5 は、正負交番解析として、0.1mm、1.0cm 刻みの強制変位を与えたものである。これらの図が示すように、0.1mm、1.0cm 刻みには微小な差はあるものの、ほとんど一致している。また、10.0cm においては前2者の差よりも大きいが一挙に最大強度を超えても、外力増分幅が解に及ぼす影響ほとんどは見られない。

### 4. 考察

これらの結果より、分岐のない状態では外力増分幅の影響は現われず、図-1における厳密な材料非線形に基づくひずみエネルギーと割線剛性によるものとの差異は応答に影響しないと言える。このことは、割線剛性によるポテンシャルエネルギー曲面と厳密な要素剛性による曲面の2つのポテンシャルエネルギー曲面を導入し、次のように解析アルゴリズムと合わせて考えれば理解できる。幾何学的非線形に対する反復計算は使用する割線剛性におけるエネルギー曲面の停留点を求めることを意味し、厳密な要素剛性による不平衡力の算定は、その剛性による停留点と現解のポテンシャルエネルギーの差を表している。最終的に収束解が得られた時点において、反復計算上のポテンシャルエネルギー停留点と厳密な要素剛性に基づくポテンシャルエネルギー停留点は一致する。ただし、2つの停留点は全ポテンシャルエネルギーとして、図-1に示されるひずみエネルギーの差を有する。

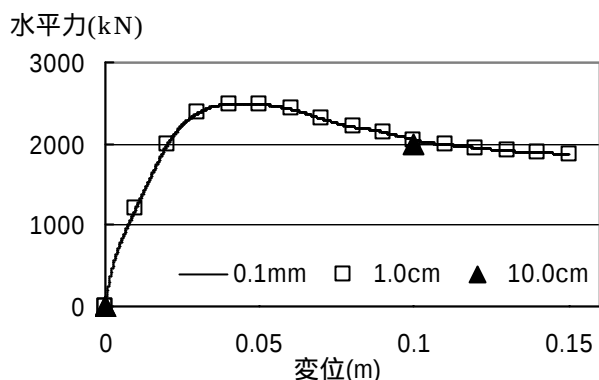


図-3 水平変位と水平力

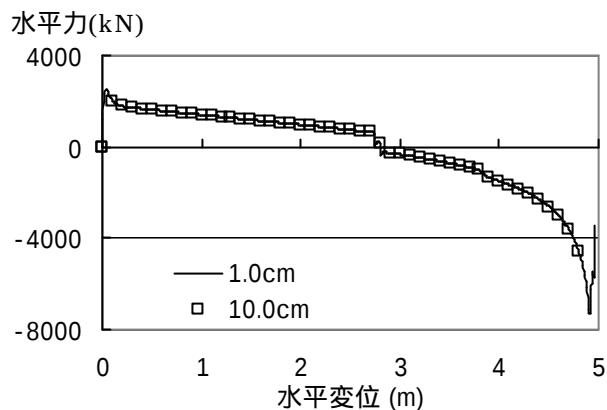


図-4 崩壊までの水平変位と水平力

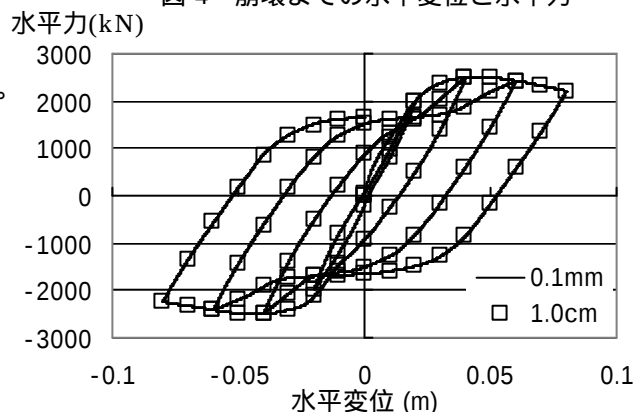


図-5 交番における水平変位と水平力

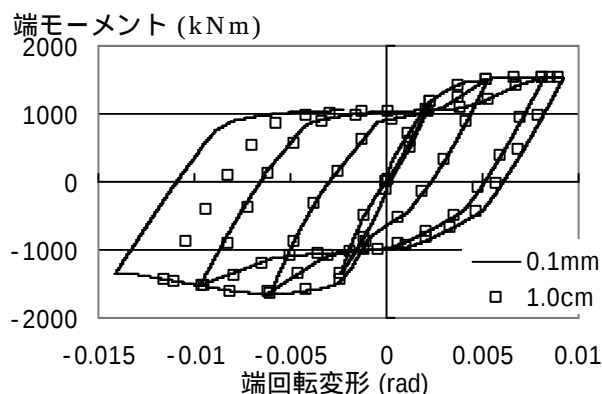


図-6 橋脚下端 P1 の端モーメントと回転変形成分