弧長法のための新しい収束手法と弧長自動設定法

日本道路 (株) 正会員 松野純一
長岡技術科学大学 正会員 岩崎英治
長岡技術科学大学 正会員 長井正嗣

1. まえがき

構造物の非線形平衡方程式の解法には，弧長法が良く用いられる．この方法は非常に汎用性のある方法であるが，収束計算の手法によっては，多くの繰り返し回数を要したり，既に求めた釣り合い曲線を後戻りしたりするなど種々の問題点がある．また，増分量を小さくすると，収束計算の繰り返し回数を少なくできるので，釣り合い曲線の曲率の大きな部分では，弧長を小さくし，逆に曲率の小さな部分では，弧長を大きくすることで計算コストの低減を図る必要がある．しかし，釣り合い曲線の正確な形状は事前に分からないので，適切な弧長を設定することは困難である．そこで，釣り合い曲線の形状や直前の収束計算の繰り返し回数を元に，弧長を自動的に設定する方法が幾つか提案されている．しかし，問題によっては弧長の設定がスムーズに行われないことがある．そこで，本報告では，収束計算の新しい手法と弧長自動設定法を提案する．

2. 平衡方程式

平衡方程式を増分形式で表すと次のようになる．

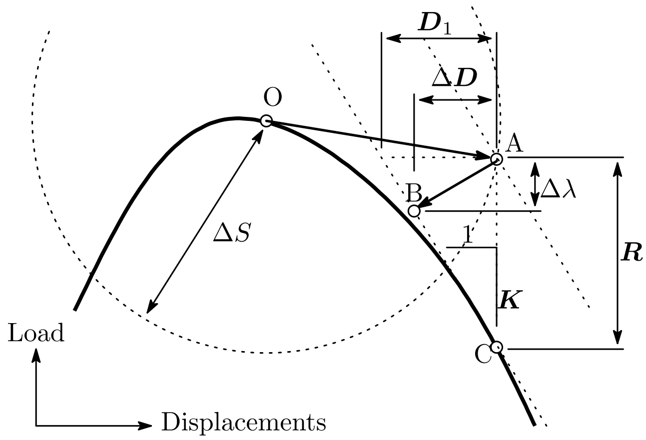
$$\boldsymbol{K}\Delta\boldsymbol{D} = \Delta\lambda\overline{\boldsymbol{P}} + (\lambda\overline{\boldsymbol{P}} - \boldsymbol{F}) \qquad (1)$$

ここで，$\boldsymbol{K}$ は接線剛性行列，$\Delta\boldsymbol{D}$ は変位増分，荷重増分は基準荷重 $\overline{\boldsymbol{P}}$ と荷重倍率の増分 $\Delta\lambda$ の積で表される．また $(\lambda\overline{\boldsymbol{P}} - \boldsymbol{F})$ は不平衡力を表している．なお，$\boldsymbol{F}$ は構造物内に生じている内力である．上式の右辺第 1 項の基準荷重ベクトルによる変位を $\boldsymbol{D}_0$，第 2 項の不平衡力による変位を $\boldsymbol{D}_1$ と表すと節点変位ベクトル $\Delta\boldsymbol{D}$ は次のように表せる．

$$\Delta\boldsymbol{D} = \Delta\lambda\boldsymbol{D}_0 + \boldsymbol{D}_1 \qquad (2)$$

3. 弧長増分法

弧長 ΔS は，荷重変位曲線を定義する空間の各成分の数値的な大きさを揃えるためのスケールパラメータ α_p, $\boldsymbol{A} = \mathrm{diag}\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N\}$ を含めた次のような式で定義される．



図–1 不平衡残差最小法

$$\Delta S^2 = (\alpha_p\Delta\lambda)^2 + (\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{D})^T(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{D}) \qquad (3)$$

上式に式 (2) を代入して，$\Delta\lambda$ について解くと，与えられた弧長増分 ΔS に対応する荷重倍率の増分が求められる．しかし，得られた解は平衡状態から僅かにずれた状態にあり，**図–1** の点 A に相当している．この点から釣り合い曲線上の点を求めるための収束計算が必要になる．弧長増分法では，この収束計算の方法として種々の方法が提案されている．

4. 不平衡残差最小法

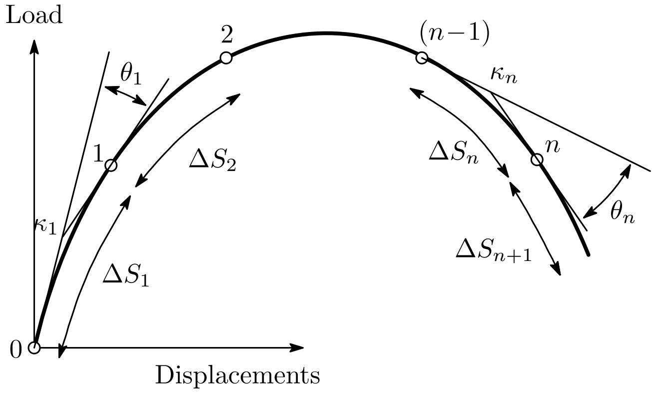
釣り合い曲線上の点を求めるための収束計算での修正量 ΔL は，弧長 ΔS と同様の式で表され，次式のようになる．

$$\Delta L^2 = (\alpha_p\Delta\lambda)^2 + (\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{D})^T(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{D}) \qquad (4)$$

上式中の $\Delta\boldsymbol{D}$ は式 (2) のように基準荷重による変位 $\boldsymbol{D}_0$ と不平衡力による変位 $\boldsymbol{D}_1$ に分けられる．この式より修正量 ΔL は荷重倍率 $\Delta\lambda$ の関数になっている．そこで，上式から修正量が最小になるような荷重倍率を求めると，次のようになる．

$$\Delta\lambda = -\frac{\boldsymbol{D}_0^T\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{D}_1}{\alpha_p^2 + \boldsymbol{D}_0^T\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{D}_0} \qquad (5)$$

Key Words: *arc-length method, minimum residual quantities method, automatic length setting method*
〒 940-2188 新潟県長岡市富岡町 1603-1 TEL 0258-46-6000 FAX 0258-47-9600



図–2 弧長自動設定法

この荷重倍率 $\Delta\lambda$ と，これに対応する変位ベクトル $\Delta\boldsymbol{D}$ は，**図–1** の点 B に相当している．この手順を繰り返すことにより釣り合い曲線上の解が得られる．

5. 弧長自動設定法

図–2 の釣り合い曲線上の点 n までの解が得られているものとする．点 $(n-1)$ から点 n までの弧長を ΔS_n, 同様に初期状態の点 0 から点 1 までの弧長を ΔS_1 と表す．また, 点 $(n-1)$ の接線と点 n の接線の間の角を θ_n，同様に点 0 と点 1 の接線の間の角を θ_1 とする．これらより点 0 から点 1 までの曲線の曲率 κ_1 と点 $(n-1)$ から点 n までの曲線の曲率 κ_n は近似的に次のように表せる．

$$\kappa_1 = \frac{\theta_1}{\Delta S_1}\,, \qquad \kappa_n = \frac{\theta_n}{\Delta S_n} \tag{6}$$

この曲率に次の点 $(n+1)$ までの距離 ΔS_{n+1} の 2 乗を乗じたもの $\kappa_n \Delta S_{n+1}^2$ は，点 $(n+1)$ での釣り合い曲線上の点からのずれ変位 (誤差) を表す指標と考えられる．この誤差の指標が，各増分段階で常に同じ大きさになるように弧長を決めると, 各増分計算での反復回数の均等化が図られるものと予想される．

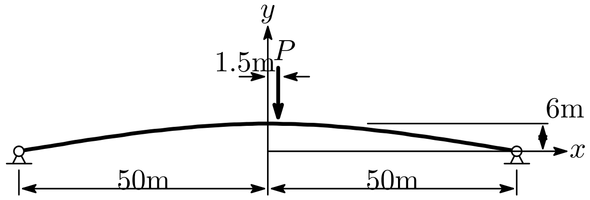
そこで, この方法を用いて次の点までの距離を決めることにすると，次式が得られる．

$$\Delta S_{n+1} = \Delta S_2 \sqrt{\frac{\kappa_1}{\kappa_n}} \tag{7}$$

上式に含まれる κ_1, ΔS_2 は, 初めの二つの平衡点 1 と 2 での解が, 明らかになっていれば求められる．

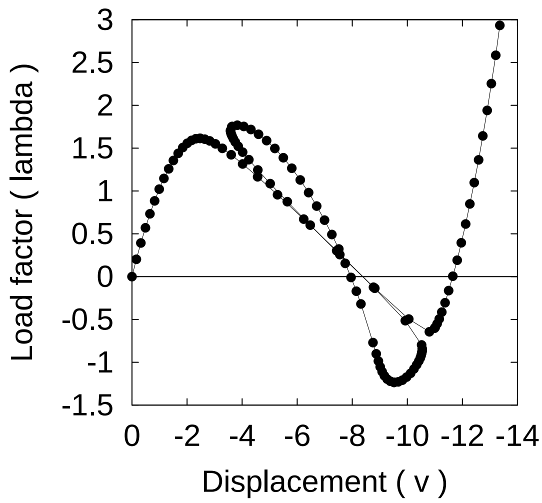
6. 扁平アーチの有限変位解析

図–3 のような扁平なアーチの頂点から 1.5m ずれたところに鉛直荷重が作用したときの荷重とアーチ頂点の鉛直変位の関係を求める．このアーチのヤング係数は E=200GPa，断面積と断面 2 次モーメントはそれぞれ A=1.0m^2, I=1.0m^4 である．弧長増分法の制御変数には，荷重倍率 λ と鉛直変位 v を用い，これらのスケーリングパラメータはそれぞれ $\alpha_p = 0.1$, $\alpha_v = 0.25$ を用いる．基準荷重は P=100MN を用いる．収束判定には，収束計算途中の変位の修正量のノルムが各増分段階の最初の変位増分ノルムの 0.001 倍以下としている．**図–4** に本研究で提案する弧長自動設定法による結果を示す．これら最初の 2 ステップの弧長を $\Delta S = 0.045$ としたときの結果である．図より，荷重変位曲線の曲率の大きな部分では，小さな弧長になり，曲率の小さな部分では大きな弧長となっている事がわかる．



E=200GN/m^2, A=1.0m^2, I=1.0m^4

図–3 扁平アーチ



図–4 扁平アーチの計算結果

7. あとがき

弧長法のための新しい収束計算法と弧長自動設定法を提案し，扁平アーチの数値計算例により，その妥当性を示した．

参考文献

1) F. Itoh and K. Nogami : On the tracing calculation of equilibrium path for imperfect systems, *Proc. JSCE, Struct. Eng. / Earthquake Eng.*, Vol.3, No.1, 1986.4.
2) T. Chaisomphob, W. Kanok-Nukulchai and F. Nishino : An automatic arc length control algorithm for tracing, equilibrium paths of nonlinear structures, *Proc. JSCE, Struct. Eng. / Earthquake Eng.*, Vol.5, No.1, pp.205-208, 1988.4.
3) W. Szyszkowski and J. B. Husband : Curvature controlled arc-length method, *Computational Mechanics*, Vol.24, pp. 245-247, 1999.