

## 端部に滑車を有するケーブル要素

長岡技術科学大学 学生会員 折戸邦明  
 長岡技術科学大学 正会員 岩崎英治  
 長岡技術科学大学 正会員 長井正剛

### 1. まえがき

ケーブル構造には、架設途中には支点や、他のケーブル上を滑動し、完成時に固定する形式のものが少なくない。この完成前のケーブルの変形や反力を把握しておく必要がある。また、各ケーブルの軸力が一定となるような形状決定の問題も重要である。これは、ケーブル同士の接続点や支点で、ケーブルが滑車を通して接続している状態を考えると実現できる。そこで、本報告では、ケーブル要素の全ポテンシャルエネルギーの汎関数を修正して、少ない自由度で解析可能な要素端部に滑車を有するケーブル要素を誘導し、数値計算によりその有効性を示す。なお、滑車とケーブルとの間の摩擦は小さく無視できるものとする。

### 2. ケーブル要素

いま、ケーブルに沿った単位長さ当たり  $q$  の分布荷重と集中荷重  $Q$  が作用して平衡状態にあるものとする。このときのケーブルに生じている軸力を  $N$  とする。この状態のケーブルにさらに分布荷重  $\Delta q$  と集中荷重  $\Delta Q$  が作用したときの平衡状態を考える。このときのケーブル要素の平衡状態は、次の汎関数の停留条件として得られる<sup>1)</sup>。

$$\Pi_C = \int_0^l \left\{ -\frac{\Delta N^2}{2EA} + [(F_x + \Delta F_x) - (N + \Delta N)] \right\} dx + \left[ \{(N + \Delta N) - n_x(Q + \Delta Q)\}^T \Delta u \right]_0^l \quad (1)$$

ここで、 $(N + \Delta N)$  は軸力ベクトルであり、ケーブル要素内の平衡方程式  $(N + \Delta N)_{,x} = -(q + \Delta q)$  を満足した次式を用いる。

$$(N + \Delta N) = (c + \Delta c) - \int_0^x (q + \Delta q) dx \quad (2)$$

また、増分前後のケーブルの単位接線ベクトルをそれぞれ  $e, e^*$  と表すと、 $(N + \Delta N) = e^{*T}(N + \Delta N)$ 、 $(F_x + \Delta F_x) = e^T(N + \Delta N)$ 、 $e = N/|N|$ 、 $e^* = (N + \Delta N)/|N + \Delta N|$

### 3. 滑車を有するケーブル要素

図-1のように、ケーブル (h), (i), (j) が節点 I, J に取り付けられた滑車を介して接続されたケーブルの系を考える。滑車を介して接続されたケーブルの軸力は、滑車の摩擦がなければ滑車部で等しくなるので、この条件を汎関数に含めることにより、滑車を表現できる。各ケーブル要素の汎関数を  $\Pi_C^{(h)}$ ,  $\Pi_C^{(i)}$ ,  $\Pi_C^{(j)}$  とすると、滑車を有するケーブルの汎関数は次のように表される。

$$\begin{aligned} \Pi_C = & \Pi_C^{(h)} + \Pi_C^{(i)} + \Pi_C^{(j)} \\ & + \Delta \tilde{u}_I \{ (N_I^{(h)} + \Delta N_I^{(h)}) - (N_I^{(i)} + \Delta N_I^{(i)}) \} \\ & + \Delta \tilde{u}_J \{ (N_J^{(i)} + \Delta N_J^{(i)}) - (N_J^{(j)} + \Delta N_J^{(j)}) \} \quad (3) \end{aligned}$$

ここで、 $\Delta \tilde{u}_I, \Delta \tilde{u}_J$  は、ラグランジュの未定係数であるが、汎関数が停留したときには、それぞれ滑車を有する節点 I と J のケーブルの滑り変位を表している。この変位は、ケーブルに沿った  $x$  軸方向の変位を正としている。また、式中の  $(N_I^{(h)} + \Delta N_I^{(h)})$  は、要素 (h) の節点 I での軸力を表している。

上式を変形して、要素ごとに表すと。

$$\begin{aligned} \Pi_C = & \Pi_C^{(h)} + \Delta \tilde{u}_I (N_I^{(h)} + \Delta N_I^{(h)}) \\ & + \Pi_C^{(i)} - \Delta \tilde{u}_I (N_I^{(i)} + \Delta N_I^{(i)}) \\ & \quad + \Delta \tilde{u}_J (N_J^{(i)} + \Delta N_J^{(i)}) \\ & + \Pi_C^{(j)} - \Delta \tilde{u}_J (N_J^{(j)} + \Delta N_J^{(j)}) \quad (4) \end{aligned}$$

これより、要素の両端に滑車のある一般的な場合のケーブル要素の汎関数は次のように表される。

$$\tilde{\Pi}_C = \Pi_C + [\Delta \tilde{u} (N + \Delta N)]_0^l \quad (5)$$

### 4. ケーブルネットの計算例

図-3のようなケーブルネットの解析を行う。通常、ケーブルネットの設計では、作用荷重により一部のケーブルにたるみが生じないように、想定する荷重の基で軸力が一定になるように設計することがある。滑車を用いることでこの問題に対応できることを示す。

**Key Words:** cable structures, pulley, finite element method

〒940-2188 新潟県長岡市富岡町 1603-1 TEL 0258-46-6000 FAX 0258-47-9600

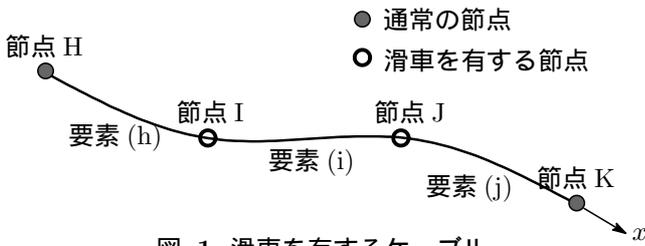


図-1 滑車を有するケーブル

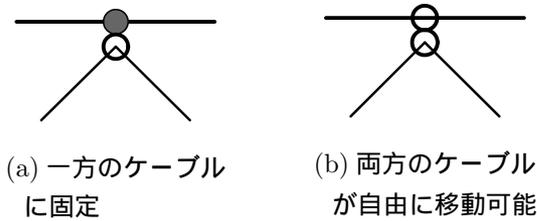
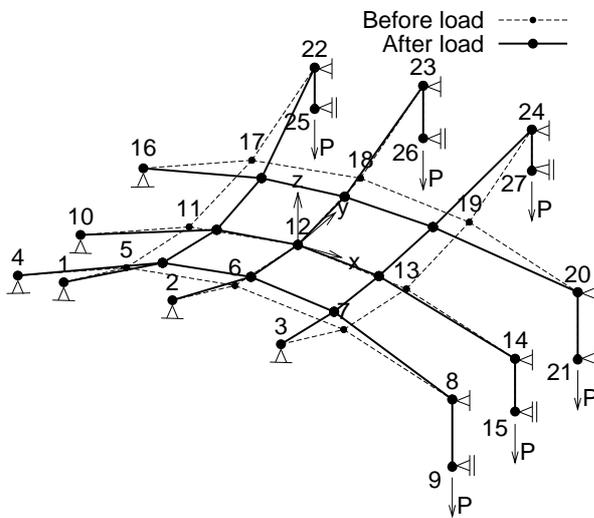


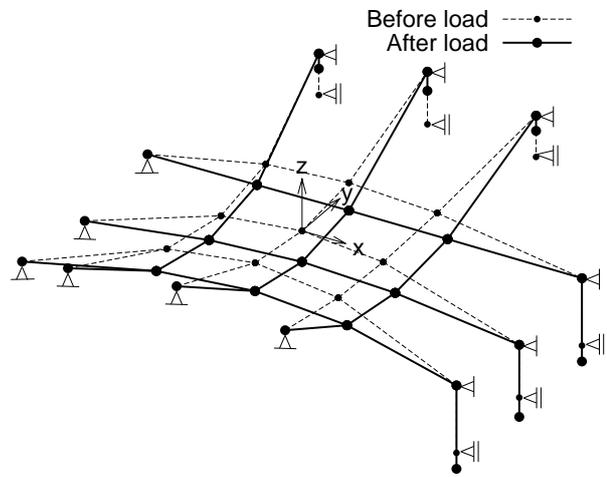
図-2 滑車の状態

表-1 初期座標値と変形後の各節点間のケーブル長

| 節点番号 | 座標値 (m) |      |       | 節点番号  | ケーブル長 (m) |        |
|------|---------|------|-------|-------|-----------|--------|
|      | x       | y    | z     |       | 図 (a)     | 図 (b)  |
| 12   | 0.0     | 0.0  | 0.0   | 12-18 | 18.918    | 19.226 |
| 13   | 25.0    | 0.0  | -5.0  | 18-23 | 35.599    | 41.778 |
| 14   | 50.0    | 0.0  | -20.0 | 23-26 | 20.265    | 7.292  |
| 15   | 50.0    | 0.0  | -40.0 | 13-19 | 19.995    | 20.546 |
| 18   | 0.0     | 25.0 | 5.0   | 19-24 | 34.194    | 38.723 |
| 19   | 25.0    | 25.0 | 0.0   | 24-27 | 15.922    | 5.763  |
| 20   | 50.0    | 25.0 | -15.0 | 12-13 | 18.918    | 21.509 |
| 21   | 50.0    | 25.0 | -40.0 | 13-14 | 35.599    | 29.275 |
| 23   | 0.0     | 50.0 | 20.0  | 14-15 | 20.265    | 27.733 |
| 24   | 25.0    | 50.0 | 15.0  | 18-19 | 19.995    | 22.049 |
| 26   | 0.0     | 50.0 | 0.0   | 19-20 | 34.194    | 29.071 |
| 27   | 25.0    | 50.0 | 0.0   | 20-21 | 25.922    | 32.059 |



(a) 集中荷重による変形



(b) さらに分布荷重が作用したときの変形

図-3 ケーブルネットの変形

表-1 に初期状態での一部の節点の座標値を示す。節点 8, 14, 20, 22, 23, 24 は滑車を有する節点であり、この節点は固定されているので、滑車は移動しないが、ケーブルには滑り変位が生じる状態になっている。また、節点 5, 6, 7, 11, 12, 13, 17, 18, 19 はそれぞれ 2 本のケーブルが滑車を介して交差し、それぞれのケーブルが滑る状態になっている。このような状態のケーブルのローラー支持点 9, 15, 21, 25, 26, 27 に鉛直荷重  $P=10\text{kN}$  を作用させると、6 本全てのケーブルの軸力は  $10\text{kN}$  になる。このときのケーブルの状態を図-3(a) に太線で示している。この状態のケーブルにケーブルの自重に相当する等分布荷重  $q=50\text{N/m}$  を作用させたときの変形状態を図-3(b) に示す。また、図 (a), (b) の変形状態での一部の節点間のケーブル長を表 1 に示す。なお、ケーブルの伸び剛性は、 $EA=150\text{MN}$  である。

自重を考慮したこのような計算に、直線ケーブル要素を用いた場合には、自重によるたるみ表現するために一つの要素で大きなケーブル長を扱えない。このため、滑車部での滑り変位の大きさに制限が加えられる。汎関数を修正したハイブリッド型の定式化を用いたことにより、本報告でのケーブル要素にはこのような滑り変位の制限が緩和されている。

また、この計算例のように滑車を有する構造としてプレストレスや自重による変形解析を行った後に、滑車部での滑り変位を拘束することにより、滑車を含まない構造系の軸力一定のもとでの形状決定とその後の荷重による変形解析を統一的行える可能性を示唆している。

参考文献

1) 岩崎英治, 長井正嗣: 滑車を有する柔ケーブル構造に適用可能な有限要素の開発, 構造工学論文集, Vol.48A, pp.151-158, 2002.