斜張橋のケーブル形状およびケーブルプレストレス力の最適化に関する研究

東洋大学* 学生員 佐々木亮
東洋大学* 正会員 新延泰生
東洋大学* 学生員 樋口幸太郎

1. はじめに

斜張橋は，そのケーブルにプレストレス力を導入することにより，主桁の断面力を小さくすることができ，軽量化が可能となる．複数ケーブルの場合は，最適なケーブルプレストレス力を試行錯誤的に決定することは困難である．また，ケーブルの添加角度によって，主桁の断面力を低減させる効果が変化するため，ケーブルの添加位置が問題となってくる．

本研究では，斜張橋のケーブル添加位置，ケーブルプレストレス力を決定するにあたり，感度係数特性を用い，目的関数（外力仕事）と制約条件を定めている．これらは，線形結合式で表されるため，線形計画法により容易に最適形状および最適ケーブルプレストレス力を求めることができる．

2. 感度解析法

変位法による静的な状態方程式は，一般に，

$$[K]\{z\}=\{F\} \tag{1}$$

で表すことができる．プレストレス力を考慮する場合，プレストレス力は荷重ベクトルとして与えられ，そのための状態方程式は，

$$[K]\{z\}=\{F\}+\{F_p\} \tag{2}$$

と表すことができる．ここで，$[K]$ は全体剛性マトリクス，$\{z\}$ は節点変位ベクトル，$\{F\}$ は節点外力ベクトル，$\{F_p\}$は，プレストレス力の荷重ベクトルを表す．

部材数mの骨組構造物における第k自由度の節点変位の形状感度係数は，式(1)を感度変数である節点座標X_hで偏微分した $\partial z_k/\partial X_h$ で表される．ここで，独立変数 S_{vi} (v=1,2,･･･,9)を中間変数として表すと次式となる．

$$\frac{\partial z_k}{\partial X_h}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{v=1}^{9}\frac{\partial z_k}{\partial S_{vi}}\frac{\partial S_{vi}}{\partial X_h} \tag{3}$$

また，節点変位の形状感度係数特性は，

$$\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial z_k}{\partial X_h}X_h=\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial z_k}{\partial x_s}x_s+\frac{\partial z_k}{\partial y_s}y_s+\frac{\partial z_k}{\partial x_e}x_e+\frac{\partial z_k}{\partial y_e}y_e\right)$$
$$=z_k+D_k \tag{4}$$

となる．ここで，nは全自由度数，D_kは次式を表す．

$$D_k=K^{-1}\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{v=5}^{6}\frac{\partial K}{\partial S_{vi}}S_{vi}+2\sum_{v=7}^{9}\frac{\partial K}{\partial S_{vi}}S_{vi}\right) \tag{5}$$

なお，トラス構造物の場合は，D_kが0となる．

感度変数がプレストレス力の場合の節点変位の感度係数は，式(2)をf_{pi}で偏微分した$\partial z/\partial f_{pi}$で表され，次式となる．

$$\frac{\partial z}{\partial f_{pi}}=K^{-1}\frac{\partial F_p}{\partial f_{pi}} \tag{6}$$

プレストレス力を考慮する場合のj部材の断面力は，

$$r_j=r_{0j}+k_jz+F_{pj} \tag{7}$$

で表すことができる．ここで，k_jはj要素の要素剛性マトリクス，右辺第1項は自重などによる断面力，第2項は外力による節点変位に伴う断面力，第3項はプレストレス力による断面力を示す．感度変数がプレストレス力の場合の断面力の感度係数は，(7)式をf_{pi}で偏微分した$\partial r_j/\partial f_{pi}$で表され，次式となる．

$$\frac{\partial r_j}{\partial f_{pi}}=k_j\frac{\partial z}{\partial f_{pi}}+\frac{\partial F_{pj}}{\partial f_{pi}} \tag{8}$$

3. 感度係数特性を用いた問題の定式化

任意の節点kに，静的な節点荷重P_kおよびモーメント荷重M_kが作用する場合の外力仕事Wは，感度変数が節点座標X_hの場合は推定式(9)，プレストレス力f_{pi}の場合は推定式(10)で定式化される．

$$|W|=\left|\sum_{k=1}^{l}\left\{P_{Hk}\left(\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial z_{Hk}}{\partial X_h}X_h-D_{Hk}\right)+P_{Vk}\left(\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial z_{Vk}}{\partial X_h}X_h-D_{Vk}\right)+M_k\left(\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial z_{\theta k}}{\partial X_h}X_h-D_{\theta k}\right)\right\}\right| \tag{9}$$

$$|W|=\left|\sum_{k=1}^{l}\left\{P_{Hk}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial z_{Hk}}{\partial f_{pi}}f_{pi}\right)+P_{Vk}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial z_{Vk}}{\partial f_{pi}}f_{pi}\right)+M_k\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial z_{\theta k}}{\partial f_{pi}}f_{pi}\right)\right\}\right| \tag{10}$$

ここで，式(9),(10)は線形結合式であるため，それぞれの式を目的関数とする単一線形問題を解くことで，制約条件を満足する解を導くことが可能となる．また，目的関数を外力仕事とすることにより，全断面力を考慮することになり，合理的な計算が可能となる．

本研究では，次のような制約条件を満足し，目的関数を最小に導くような解を最適とし解析を行う．形状最適化の場合は(11)式，ケーブルプレストレス力の最適化の場合は(12),(13)式を制約条件としている．

$$\underline{X_h}\le X_h\le\overline{X_h} \tag{11}$$

$$\underline{f_{pi}}\le f_{pi}\le\overline{f_{pi}} \tag{12}$$

$$-M\le {M_k}^{0}+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial M_k}{\partial f_{pi}}f_{pi}\le M \tag{13}$$

キーワード：ケーブル形状，ケーブルプレストレス，感度解析，外力仕事最小原理，線形計画法
* 東洋大学 大学院工学研究科 構造システム研究室 〒350-0815 埼玉県川越市鯨井 2100 TEL：0492-39-1391 FAX：0492-31-4482

Table1　断面諸量および荷重条件

	A (m^2)	I (m^4)	E (kN/m^2)
主桁	1.130	2.520	2.000E+08
タワー	2.700	3.490	2.000E+08
ケーブル	0.102	1.000E-09	2.000E+08
CASE-1	NN2,4,8に1740.2 (kN)		
CASE-2	NN2に2240.2 (kN)，NN4,8に1740.2 (kN)		
CASE-3	NN4に2240.2 (kN)，NN2,8に1740.2 (kN)		
CASE-4	NN8に2240.2 (kN)，NN2,4に1740.2 (kN)		

Table2　外力仕事 (kN･m)の変化

	初期形状	最適形状	減少率 (%)
CASE-1	27.633	23.548	14.783
CASE-2	37.693	32.383	14.088
CASE-3	35.435	29.723	16.121
CASE-4	27.654	23.432	15.266

Table3　最適ケーブルプレストレス力 (kN)および外力仕事 W

	形状	Cable-1	Cable-2	Cable-3	Cable-4	W
CASE-1	初期	5217.0	4983.0	4983.0	5217.0	3.118
	最適	5174.0	3791.0	3791.0	5174.0	-0.006
CASE-2	初期	6286.2	5664.7	5664.7	6286.2	4.134
	最適	6008.6	4418.4	4418.4	6008.6	-0.003
CASE-3	初期	5238.0	5503.5	5503.5	5238.0	8.084
	最適	6086.9	3615.4	3615.4	6086.9	-0.005
CASE-4	初期	6314.5	3491.6	3491.6	6314.5	0.001
	最適	5954.4	2968.7	2968.7	5954.4	-0.003

ここで，$\underline{X_h}$，$\underline{f_{pi}}$，$\overline{X_h}$，$\overline{f_{pi}}$およびMは，感度変数およびモーメントの下限値および上限値である．

4.　4ケーブル斜張橋モデルによる解析例

Fig.1に示す4ケーブル斜張橋モデルを例に，Table1に示す断面諸量および4つの荷重条件を下に，ケーブル形状，ケーブルプレストレス力を決定する．

形状最適化について，Cable-1～4のx座標を変数とし，それ以外の座標は定数としている．初期節点付近においては，*FEM*による応答変位と，推定式による推定変位に近似した傾向がみられるが，変数の変動が大きくなるにつれ，誤差が大きくなることがある．そのため，変数の変動を小さくし，本手法による解析を繰り返し行うことにより，最適解を求めている．解析の結果，得られた最適形状をFig.2からFig.5に示す．また，形状の変化に伴う外力仕事の値をTable2に示す．

得られた最適形状を用いて，ケーブルプレストレス力の最適化を行う．比較のため，形状最適化を行わない場合の初期形状に対する最適ケーブルプレストレス力と，最適形状に対する最適ケーブルプレストレス力をそれぞれ求めている．解析の結果，得られたケーブルプレストレス力と，そのケーブルプレストレス力を導入したときの外力仕事の値をTable3に示す．

5.　結論

解析の結果，今回用いたモデルに関しては，形状の最適化を行うことにより，初期形状に比べ外力仕事の値を約14～16%減少することができる．

最適ケーブルプレストレス力については，荷重条件によっては，導入するケーブルプレストレス力の値が初期形状の場合と比較して大きくなるケーブルもある．しかし，全体的にみるとその値は小さくなることがわかる．また，ケーブルプレストレス力導入後の外力仕事についても，同様のことがいえ，その値もほぼ0にすることができる．

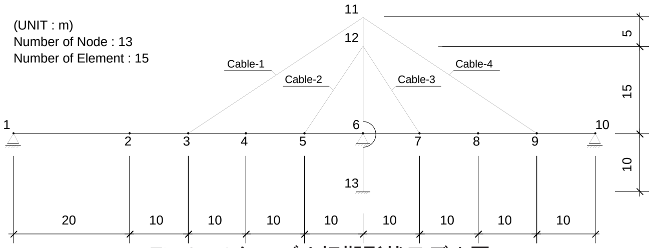

Fig.1　4ケーブル初期形状モデル図

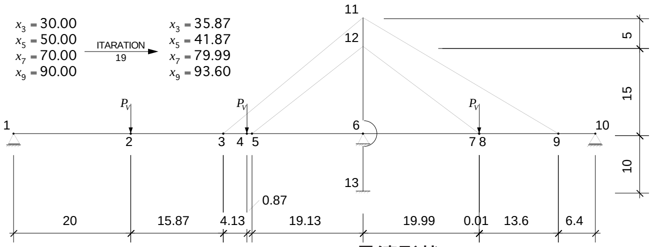

Fig.2　CASE-1 最適形状

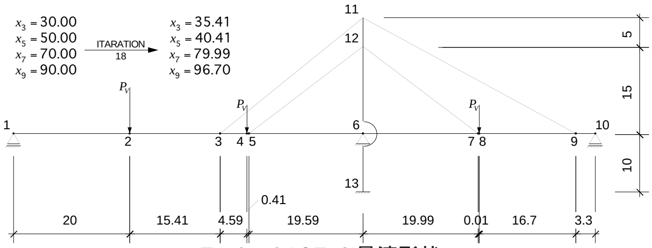

Fig.3　CASE-2 最適形状

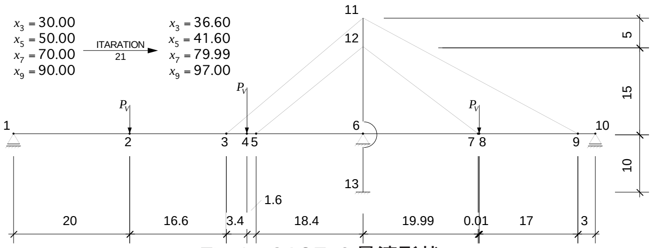

Fig.4　CASE-3 最適形状

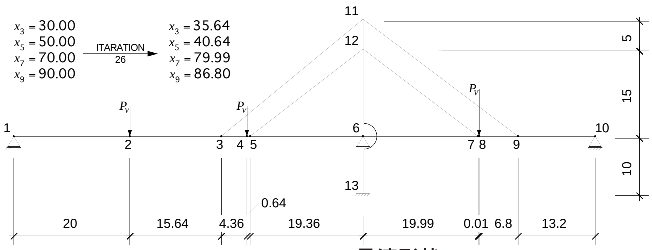

Fig.5　CASE-4 最適形状

参考文献：1) 大橋司：斜張橋のケーブル形状およびケーブルプレストレス力の最適化に関する研究　東洋大学学士論文，　2002 年 1 月
2) 木下栄蔵：わかりやすい意志決定理論入門　近代科学社，　1996 年 2 月