

Spline 要素法を用いた直交異方性 Mindlin 斜板の振動解析

大同工業大学大学院 学生員 ○木村健一

大同工業大学 都市環境デザイン学科 正員 近藤八重 正員 水澤富作

1. まえがき 斜板は、斜橋や航空機の翼などの構造要素として用いられており、その振動特性を知るとは、設計上重要な課題である¹⁾。斜め格子げた橋や斜め鋼床版は、薄板を仮定した直交異方性板理論を用いて解析される場合があるが、板厚が増大すると、横せん断変形の影響が無視できなくなる。これまでに、直交異方性斜板の振動解析では、Thangam ら²⁾の有限帯板法を用いた研究や Dokainish ら³⁾の変厚を有する斜板に Galerkin 法を適用した研究などが報告されている。しかしながら、それらは薄板理論に基づくものであり、横せん断変形や回転慣性の影響を考慮した直交異方性変厚斜板の振動解析は、さほど報告されていない。

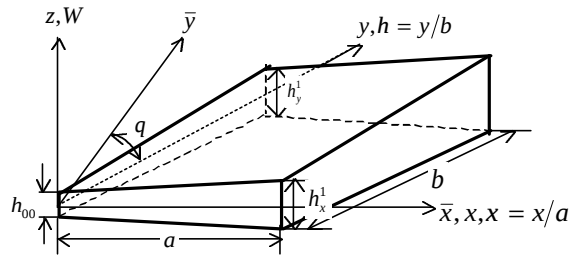


図-1 変厚 Mindlin 斜板と斜交座標系

本文では、spline 要素法を用いて、図-1 に示すよう

な 2 方向に任意の変断面形状を持つ直交異方性 Mindlin 斜板の振動解析を行い、解の収束性や精度について検討した。また、振動特性に与える異方性パラメータや変厚比などの影響について明らかにしている。

2. 式の定式化 Mindlin 板理論とポテンシャルエネルギー最小の原理を用いて、図-1 に示すような 2 方向に変厚な spline 要素モデルを導く。式の定式化にあたり、次式で表される無次元斜交座標系を用いる¹⁾。
 $x = x/a, h = y/b, W' = W/b \dots (1)$ ここで、 W はたわみであり、 a と b はそれぞれ斜板の長さや幅を示す。

横せん断変形の影響を考慮した Mindlin 板理論では、次式の独立した変位関数が要素内で仮定される。

$$f_x = \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_y} A_{mn} N_{m,k}(\xi) N_{n,k}(\eta), f_y = \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_y} B_{mn} N_{m,k}(\xi) N_{n,k}(\eta), W' = \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_y} C_{mn} N_{m,k}(\xi) N_{n,k}(\eta) \dots (2)$$

ここで、 A_{mn}, B_{mn}, C_{mn} はそれぞれ未定係数であり、 $N_{m,k}(x)$ と $N_{n,k}(h)$ は、正規化された spline 関数である。

斜板の板厚は x 方向と y 方向に線形的に変化するものと仮定すれば、式で与えられる。

$$h(x, h) = h_{00} H(x) T(h), H(x) = (d_x - 1)x + 1, T(h) = (d_y - 1)h + 1 \dots (3)$$

ただし、 h_{00} は基準板厚であり、また d_x と d_y は変厚比であり、それぞれ $h_x^1/h_{00}, h_y^1/h_{00}$ で表す。

斜め直交異方性変厚 Mindlin 板のひずみエネルギー U と運動エネルギー T は、それぞれ次式で表される。

$$U = (D_x^{00} ab \cos q / 2a^2) \int_0^1 \int_0^1 H(x)^3 T(h)^3 \left[\sec^2 q \left\{ \cos^4 q (\partial f_x / \partial x)^2 + 2n_{xy} \cos^2 q \left\{ \sin^2 q (\partial f_x / \partial x)^2 - \sin q (\partial f_x / \partial x) (\partial f_y / \partial x) - (a/b) \sin q (\partial f_x / \partial x) (\partial f_y / \partial h) + (a/b) (\partial f_x / \partial x) (\partial f_y / \partial h) \right\} \right. \right. \\ \left. \left. + (D_y / D_x) \left\{ \sin^2 q (\partial f_x / \partial x) - \sin q (\partial f_y / \partial x) - (a/b) \sin q (\partial f_x / \partial h) + (a/b) (\partial f_y / \partial h) \right\}^2 \right\} \right. \\ \left. + (D_{xy} / D_x) \left\{ -2 \sin q (\partial f_x / \partial x) + (\partial f_y / \partial x) + (a/b) (\partial f_x / \partial h) \right\}^2 + 12(1 - n_{xy} n_{yx}) \kappa (b/h_0)^2 (a/b)^2 H(x) T(h) \right. \\ \left. \times \left[(G_{yz} / E_x) \left\{ \cos q f_x + (b/a) (\partial W' / \partial x) \right\}^2 + (G_{xz} / E_x) \left\{ -\sin q f_x + f_y - \tan q (b/a) (\partial W' / \partial x) + \sec q (\partial W' / \partial h) \right\}^2 \right] \right] dx dh \\ T = (rh_{00}/2) w^2 ab^3 \cos q \int_0^1 \int_0^1 \left\{ H(x) T(h) W'^2 + (1/12) (h_{00}/b)^2 H(x)^3 T(h)^3 (f_x^2 - 2 \sin q f_x f_y + f_y^2) \right\} dx dh \dots (4)$$

ここで、 q は斜角、 $D_x^{00} = E_x h_{00}^3 / 12(1 - n_{xy} n_{yx})$ 、 D_x, D_y は曲げ剛性、 D_{xy} はねじれ剛性、 G_{xz}, G_{yz} はせん断弾性係数、 n_{xy}, n_{yx} はポアソン比、 κ はせん断修正係数、 r は密度、 w は円振動数 (rad/sec) である。

また、異方性パラメータは、それぞれ、曲げ剛性比 $K = D_y / D_x$ 、ねじり剛性比 $L = D_{xy} / D_x$ 、せん断弾性係数比 $S = G_{xz} / E_x = G_{yz} / E_x$ で定義する。

斜板の全ポテンシャルエネルギー、 Π は次式で示される。

$$\Pi = U - T \dots (5)$$

キーワード 変厚斜板、直交異方性板、Mindlin 板、spline 要素法、振動解析

〒457-8532 名古屋市南区白水町 40 大同工業大学都市環境デザイン学科 電話 052-612-5571

したがって、式(5)の Π を極値化すれば、次式の代数方程式が得られる。

$$\partial \Pi / \partial \{\Delta\}_{rs} = 0 \quad \dots (6)$$

3. 数値計算例および考察

数値計算例では、周辺固定された変厚斜板を対象にして、ポアソン比は $n_{xy} = 0.3$ ，せん断修正係数 κ は $5/6$ に仮定している。

3.1 本手法の収束性と精度比較

表-1 は、2 方向に変厚を有する直交異方性斜板 ($K=10$, $L=0.35$, $S=4.2$) の振動数パラメータ， $n^* = wb^2 \sqrt{r h_{00} / D_x^{00}}$ の収束性に与える要素分割数 $M_x = M_y$ の影響を示す。ここで、 x 方向の変厚比 h_x^1/h_{00} と y 方向の変厚比 h_y^1/h_{00} を 2.0，幅厚比 $b/h_{00} = 10$ ，辺長比 $a/b = 1.0$ と仮定する。また、斜角 q を 45° ， 60° ，要素分割数を 12 から 20 まで変化させている。これより、要素分割数を増大すると、振動数パラメータ n^* は、一定値への安定した収束性を示している。以後の計算では要素分割数を 20 と仮定する。

表-2 は、等厚な直交異方性 Mindlin 斜板の振動数パラメータ n^* の精度比較について示している。ここで、幅厚比 $b/h_{00} = 100$ と仮定する。また、辺長比 a/b を 1，0.5，斜角 q を 0° から 30° まで変化させている。比較のために、Dokainish らの結果³⁾も示してある。これより、辺長比や斜角に関係なく、本手法の解は、Dokainish らの値とよく一致した結果を示している。

3.2 n^* に与える曲げ剛性比 K の影響

図-2 には、直交異方性 Mindlin 斜板 ($L=0.35$, $S=4.2$) の n_1^* に与える曲げ剛性比 K と幅厚比 b/h_{00} の影響が示してある。ここで、斜角 $q = 45^\circ$ ，辺長比 $a/b = 1.0$ ，変厚板の変厚比は $h_x^1/h_{00} = h_y^1/h_{00} = 2.0$ と仮定している。また、幅厚比 b/h_{00} を 10 から 40 まで、曲げ剛性比 K を 0.1 から 10 まで変化させている。これより、 n_1^* に与える曲げ剛性比 K の影響は、 b/h_{00} が増大すると大きく現れ、また等厚板と比べて、変厚板の n_1^* に与える K の影響は顕著に見られる。

4. まとめ

1) 本手法を用いれば、変厚斜板の振動解析ができ、安定した収束性と精度が得られる。
2) n_1^* に与える曲げ剛性比 K の影響は、 b/h_{00} が増大すると大きく現れる。
3) 等厚板と比べて、変厚板の方が n_1^* に与える K の影響は、顕著に見られる。

参考文献 1) 水澤他: 構造工学論文集, Vol.46A, pp.25-32. 2000. 2) P. V. Thangam Babu et. al.: J. Sound and Vibr. Vol.18 (4), pp.465-474. 1971. 3) M. A. Dokainish et. al.: AIAA Journal. Vol.11, No.12, pp.1618-1621, 1973.

表-1 2 方向に変厚を有する直交異方性斜板の振動数パラメータの収束性に与える要素分割数の影響: $b/h_{00} = 10$, $a/b = 1.0$
 $h_x^1/h_{00} = h_y^1/h_{00} = 2.0$

θ (°)		$M \times M_y$	modes				
			1st	2nd	3rd	4th	5th
等方性 ($K=1$, $L=0.35$, $S=4.2$)	45	12	28.35	34.34	64.68	86.02	108.2
		16	28.38	34.37	64.71	86.10	108.2
		20	28.39	34.40	64.73	86.15	108.3
	60	12	37.45	40.05	77.51	93.59	122.0
		16	37.42	40.04	77.52	93.57	122.1
		20	37.41	40.04	77.52	93.57	122.1
異方性 ($K=10$, $L=0.35$, $S=4.2$)	45	12	81.13	87.81	100.1	116.8	135.5
		16	81.20	88.01	100.4	117.0	135.4
		20	81.23	88.09	100.5	117.1	135.4
	60	12	115.6	121.4	133.0	150.0	169.5
		16	115.7	122.0	133.8	150.3	168.9
		20	115.8	122.2	134.1	150.5	168.9

表-2 等厚な直交異方性斜板の n^* の精度比較:
 $b/h_{00} = 100$

a/b	θ (°)	methods	modes			
			1st	2nd	3rd	4th
0		SEM	4.811	7.946	11.60	13.76
		Galerkin ³⁾	4.813			13.74
1	15	SEM	4.988	8.361	11.92	13.78
		Galerkin ³⁾	4.989			13.75
	30	SEM	5.660	9.762	13.26	15.07
		Galerkin ³⁾	5.659			15.01
0.5	0	SEM	4.092	4.500	5.490	7.594
		Galerkin ³⁾	4.104		5.504	
	15	SEM	4.178	4.653	5.741	7.971
		Galerkin ³⁾	4.190		5.766	
	30	SEM	4.531	5.230	6.626	9.245
		Galerkin ³⁾	4.545		6.707	

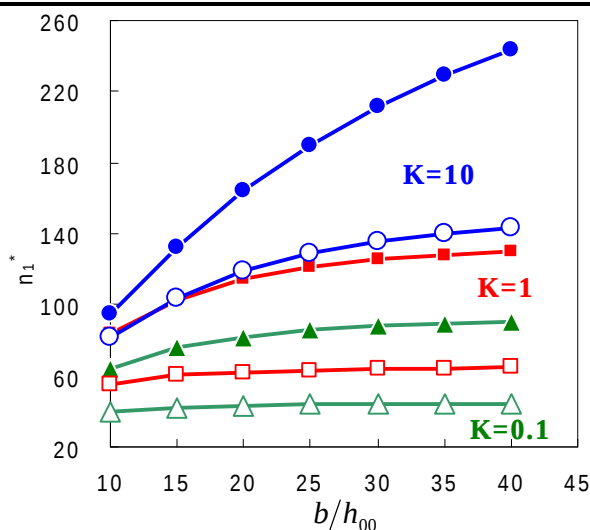


図-2 直交異方性斜板の n_1^* に与える曲げ剛性比と幅厚比の影響

等厚板 変厚板
 $K=10$
 $K=1$
 $K=0.1$