複素 Lagrange 多項式に基づく二次元離散データの EF 補間

足利工業大学　正 会 員 ○ 末武　義崇
足利工業大学　学 生 員　内田伸一郎

１．まえがき

エレメントフリー法（EFGM）は、要素分割を必要としない新しい数値解析手法として注目されており、メッシュ依存性の高い問題に対する有望な解析手法として、多くの研究報告がなされている。筆者らも、Lagrange の多項式に基づく簡易 EFGM を構築し、梁や薄板の有限変位解析に適用することにより、その有用性を示してきた[1)]。一方、筆者らが構築した EFGM には、解析対象の節点配置が格子状のものに限定されてしまうという問題点が残されている。

本研究では、こうした筆者らの簡易 EFGM が持つ問題点を克服するために、複素 Lagrange 多項式を新たに定義し、任意の節点配置に対応し得るような EFGM の再定式化を図った。実際、再定式化した EFGM を具体的な力学の問題に適用することは、必ずしも容易でない。そこで今回は、二次元領域に分布する離散データの補間にエレメントフリー法を適用することで、複素 Lagrange 多項式に基づく新たな EFGM の可能性について検討することとした。特に、数値計算例を通じ、解が調和関数で表現されるような問題には、新しい EFGM が極めて有効な手法となり得ること示す。

２．複素 Lagrange 多項式

二次元領域に任意の配置で分布する節点を考え、各節点には複素データ $f_k = u_k + iv_k$ が与えられているものとする。今、領域内のある評価点 $z = x + iy$ の周りにサポート領域を設定し、そのサポート内に $(N+1)$ 個の節点 $\{z_k = x_k + iy_k\}(k = 0 \sim N)$ が含まれるものとすれば、次式のような複素 Lagrange 多項式を定義することができる。

$$f(z) = \sum_{k=0}^{N} f_k \varphi_k(z) \;;\quad \varphi_k(z) = \prod_{m=0}^{N} Z_{m,k}(z) \;,\quad Z_{m,k}(z) = \begin{cases} 1 & (m = j) \\ (z - z_m)/(z_k - z_m) & (m \neq j) \end{cases} \tag{1}$$

ここに、$\varphi_k(z)$ は複素 Lagrange 基底であり、明らかに $\varphi_k(z_l) = \delta_{kl}$ となる。従って、式（１）で定義される複素 Lagrange 多項式は、一致条件 $f(z_k) = f_k$ を満たす。式（１）を用いれば、評価点 $z = x + iy$ における関数値や微分値を、サポート領域内の節点値 f_k によって次式のように離散的に表現することができる。

$$f^{(n)}(z) = \boldsymbol{B}_n^T \boldsymbol{f} \;;\quad \boldsymbol{B}_n^T = \lfloor \varphi_0^{(n)}(z) \;\; \varphi_1^{(n)}(z) \;\; \cdots \;\; \varphi_N^{(n)}(z) \rfloor \;,\quad \boldsymbol{f}^T = \lfloor f_0 \;\; f_1 \;\; \cdots \;\; f_N \rfloor \tag{2}$$

導入した“サポート領域”は、各評価点に付随して設定するものであるから、式（２）で表される離散化過程には、固定化された“要素”という概念は不要となる。

３．離散データの補間

本研究では、二次元離散データの補間計算の具体例を示すために、次式に節点座標を代入し、複素節点値 $f_k = u_k + iv_k$ の実部および虚部をそれぞれ発生させることとした。

$$u(x,y) = \cos\frac{\pi x}{2}\cosh\frac{\pi y}{2} \quad,\quad v(x,y) = -\sin\frac{\pi x}{2}\sinh\frac{\pi y}{2} \tag{3}$$

式（３）における２つの実変数関数は共に調和関数であり、互いに Cauchy-Riemann の式を満足している。すなわち、両者は互いに共役な調和関数である。与えた複素節点値を式（２）によってエレメントフリー的に補間（EF 補間）することで、式（３）の実変数関数 $u(x,y)$ あるいは $v(x,y)$ およびそれらの偏導関数を正確

キーワード：エレメントフリー法，複素 Lagrange 多項式，補間，任意節点配置，調和関数
〒326-8558　足利市大前町 268-1 足利工業大学 都市環境工学科 TEL：0284-62-9981 FAX：0284-62-9100

に再現し得るかどうかが問題となるわけである。

例として、実変数関数$u(x, y)$の再現性を確認する。節点データの与え方を考慮すると、式（２）を用いてEF 補間を行った場合、複素 Lagrange 多項式$f(z)$の実部が$u(x, y)$に対応すると考えられる。すなわち、関数$u(x, y)$およびその偏導関数は、次式によって近似し得る。

$$u(x, y) \approx \mathrm{Re}[\boldsymbol{B}_0^T \boldsymbol{f}] \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial x} \approx \mathrm{Re}[\boldsymbol{B}_1^T \boldsymbol{f}] \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} \approx -\mathrm{Im}[\boldsymbol{B}_1^T \boldsymbol{f}] \qquad (4)$$

４．数値計算結果

本研究では、格子状に限定されない任意の節点配置に対応し得るかどうかを確認することが主たる目的となっている。そこで、図１に示すような二次元領域$[-1,1]\times[-1,1]$内でランダムに分布する節点配置を考え、それぞれの節点に式（３）で計算した節点値を与えるものとする。そして、式（４）を用いて、与えた複素節点値に対する補間計算を行った。

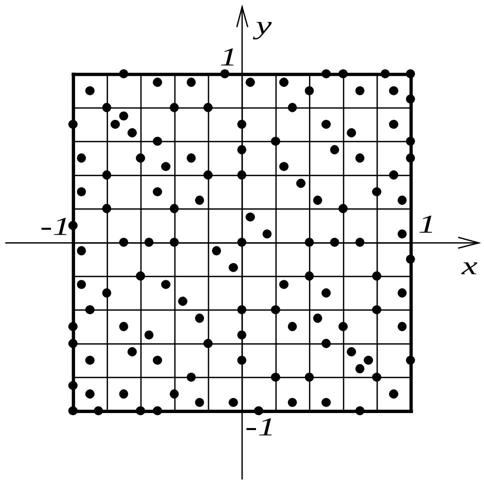

図１．任意に分布した節点配置

数値計算結果を図２から図４に示す。図はいずれも補間計算によって得られた近似関数を、三次元空間内の曲面として表示したものである。図２から明らかなように、補間計算の結果得られた曲面は、式（３）で与えられた実変数関数$u(x, y)$の表す曲面を極めて良好に再現している。また、図３および図４を見ると、複素 Lagrange 多項式の微分によって得られた曲面も、式（３）の$u(x, y)$を直接偏微分して得られる曲面と極めて良く一致していることがわかる。

以上の計算結果を通じ、複素 Lagrange 多項式に基づく EF 補間は、互いに共役な調和関数によって発生させた節点値を用いる限り、節点配置の分布が任意の形状であったとしても、極めて良好な補間結果を与えることが明らかになった。

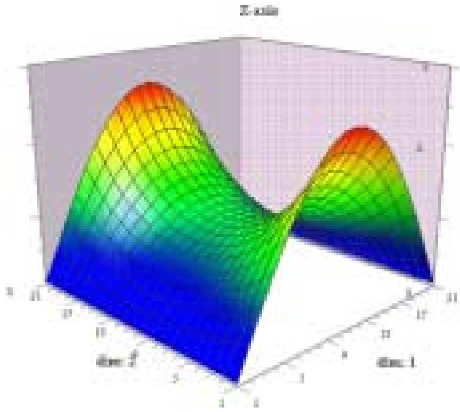

図２．補間結果の形状

５．まとめ

新たに定義した複素 Lagrange 多項式に基づくエレメントフリー定式化を行った結果、任意に分布した節点配置に対する補間計算が可能となった。特に、互いに共役な調和関数によって発生させた節点値については、新たに定式化した EF 補間が偏導関数も含め、極めて良好な近似結果を与えることが明らかになった。このことから、解が互いに共役な調和関数によって表現されるような力学問題に関しては、本研究で提案した複素 Lagrange 多項式に基づくエレメントフリー法が、有効な数値解析手法になりうることが期待される。今後は、St.Venant の単純ねじりなど、比較的簡単な力学問題に本手法を適用する予定である。

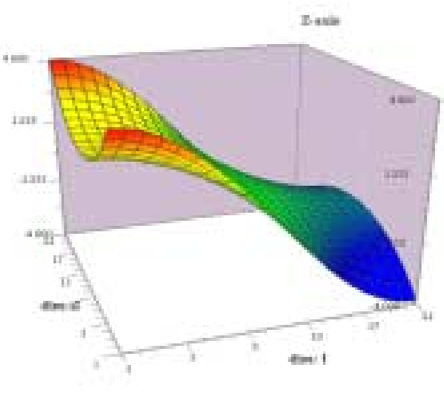

図３．偏導関数$\partial u/\partial x$の近似

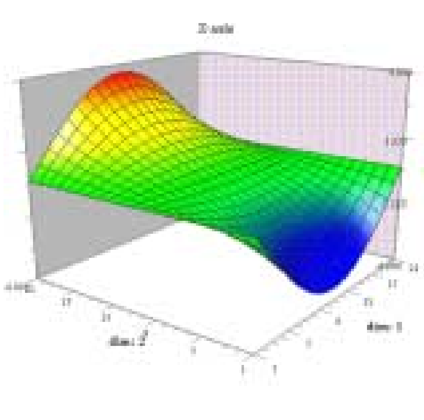

図４．偏導関数$\partial u/\partial y$の近似

参考文献：1) Y. Suetake: Element Free Method based on Lagrange Polynomial, Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol.128, No.2, pp.231～239, 2002.2.