高精度要素を用いたフリーメッシュ法に関する研究

琉球大学　学生会員　○大城　勝・琉球大学　正会員　伊良波　繁雄
琉球大学　正会員　富山　潤・琉球大学　学生会員　島袋　佳
東京大学　矢川　元基

１．はじめに

近年，新しい解析手法としてメッシュレス法の研究が様々な工学分野で盛んに行われているが，その手法の一つにフリーメッシュ法（FMM）がある[1]．FMM の要素作成アルゴリズムの制約条件により，使用要素に２次要素を用いるのは困難であったため, 既存 FMM では定ひずみ三角形要素が用いられている．しかし，定ひずみ三角形要素は精度的に問題があり，FMM の高精度化の試みがいくつかなされている．そこで本研究では，FMM の局所要素として 6 節点三角形アイソパラメトリック要素を，回転自由度を有する 3 節点三角形要素に変換し検討を行う．

２．FMM の基本的アルゴリズム

FMM は，各節点（中心節点）ごとにその付近の節点（衛星節点）を集めてローカルな領域で一時的に三角形要素を作り，これらの一時的な三角形要素の要素剛性マトリックスから中心節点に寄与する行成分を集め，全体剛性マトリックスを作成していく．具体的には，図-1 のように，中心節点 l 付近にある衛星節点（$m,n,o,p,\cdots$）を集め（中心節点 l の節点密度関数で定義される半径 R の領域），中心節点 l に対して時計または反時計まわりに並べ，中心節点 l を中心に一時的に三角形要素（$lmn, lno, lop, \cdots$）を作る．各三角形要素（例 lmn）について有限要素法と同様に要素剛性マトリックス $[K_e]_{lmn}$ を作成し，$[K_e]_{lmn}$ の中心節点 l に寄与する行成分のみを全体剛性マトリックス $[K]$ に足し込んでいく．得られた全体剛性マトリックスをもとに連立一次方程式を解く方法は，直接法や反復法を用いることが出来，本研究では，CG（共役勾配）法を用いた．

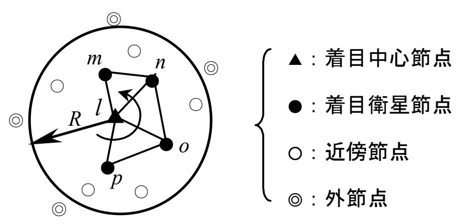

図-1　ローカル要素概念図

３．回転自由度を有する三角形要素の定式化

既存 FMM では, 図-1 に見られるようにローカルな領域で中心節点と周辺の衛星節点で 3 節点三角形要素の生成を行う．本研究では要素生成の際に，要素頂点となる節点の座標を用いて図-2（a）の点（4,5,6）のように中間節点座標を求め，アイソパラメトリック要素を作成する．次に，この要素の剛性マトリックスを，図-2（b）の回転自由度を有する三角形要素に変換する．

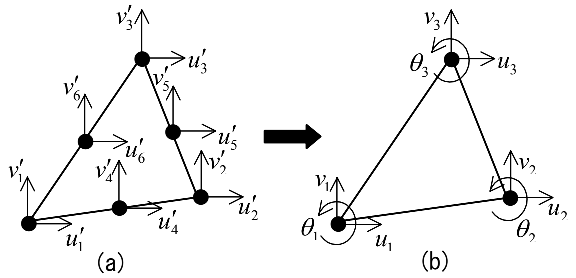

図-2　アイソパラメトリック要素から回転自由度を有する三角形要素への変換

図-2（b）の各辺について，それぞれの中間点の回転による増加分を含めた変位を求め, 6 節点についての変位をマトリックス表示すると式（1）のようになる．

$$
\begin{Bmatrix} u'_1 \\ v'_1 \\ u'_2 \\ v'_2 \\ u'_3 \\ v'_3 \\ u'_4 \\ v'_4 \\ u'_5 \\ v'_5 \\ u'_6 \\ v'_6 \end{Bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0.5 & 0 & -y_{21}/8 & 0.5 & 0 & y_{21}/8 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0.5 & x_{21}/8 & 0 & 0.5 & -x_{21}/8 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & -y_{32}/8 & 0.5 & 0 & y_{32}/8 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & x_{32}/8 & 0 & 0.5 & -x_{32}/8 \\
0.5 & 0 & y_{13}/8 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & -y_{13}/8 \\
0 & 0.5 & -x_{13}/8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & x_{13}/8
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}
\qquad (1)
$$

ここで，式（1）を次のように表す．

$$\{u'\} = [T]\{u\} \qquad (2)$$

式（1）で，$x_{21} = x_2 - x_1$，$y_{21} = y_2 - y_1$，x_1，y_1 は節点 1 の

キーワード　フリーメッシュ法，定ひずみ要素，アイソパラメトリック要素，回転自由度
連絡先　〒903-0129　沖縄県中頭郡西原町字千原１番地　琉球大学工学部環境建設工学科　ＴＥＬ098-895-8663

座標，x_2，y_2は節点２の座標である．6節点三角形アイソパラメトリック要素の剛性方程式（3）に式（2）を代入することで，回転自由度を有する三角形要素[2)]の剛性方程式（4），(5) を導くことができる．

$$[K']\{u'\}=\{F'\} \tag{3}$$

$$[T]^T[K'][T]\{u\}=[T]^T\{F'\} \tag{4}$$

$$[K]\{u\}=\{F\} \tag{5}$$

４．　数値解析例（片持ち梁解析）

４．１　解析精度

図-3 のような片持ち梁の自由端に集中荷重が作用する数値解析を行った．解析は従来用いられている定ひずみ三角形要素を用いたFMM（**図-4** 中，定ひずみ)，1，3，4点積分の高精度要素を用いたFMM（**図-4** 中，1点積分,3点積分,4点積分），市販の解析ソフト（6節点アイソパラメトリック要素）を用いた有限要素法（**図-４** 中，6Ipara）で解析した．**図-3** で荷重 P=1000kgf，片もち梁の長さ L=1000cm，高さ H=200cm，厚さ t=1cm，ヤング係数 E=210000kgf/cm^2，ポアソン比 ν=0.2である．解析では，自由度を約100から3000程度まで増加させ，各段階における載荷点のたわみ（δ）を求めた．解析結果を**図-4** に示す．**図-４** では，横軸を自由度，縦軸はδとはり理論解（δ^T）に対する比率（δ/δ^T）で表した．**図-4** より二次式近似の6節点アイソパラメトリック要素の結果は，少ない節点数から理論解に極めて近い精度を示している．そのアイソパラメトリック要素から変換して導かれた回転自由度を有する三角形要素を用いたFMMは，定ひずみ三角形要素が自由度3000程度で理論解に達しているのに対して，1000 自由度を超えたあたりでは理論解にほぼ一致しているのがわかる．

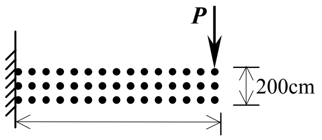

図-３　節点分布

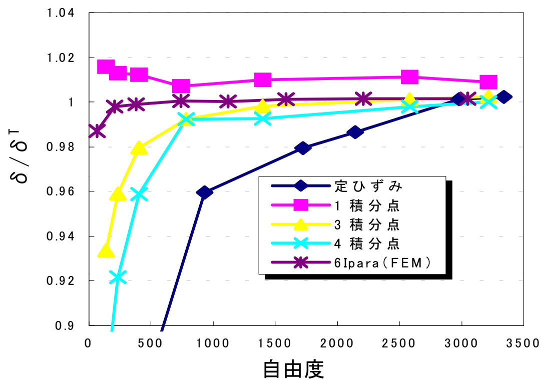

図-４　自由度・精度関係

特に3点積分を利用した場合，安定した解を得ている．

４．２　並列計算

高精度要素を用いることによって自由度が増加し，解析時間に問題が生じるが，計算を並列化することで解決する．並列化手法については文献3)に詳しい．

並列処理を評価する指標としては，従来用いられているスピードアップ S_n，並列効率 E_n（式(6)参照）を用いることにする．

$$S_n=\frac{t_1}{t_n}\ ,\ E_n=\frac{S_n}{n} \tag{6}$$

ここでは，高精度要素（３点積分）を用いた並列計算を行い，その解析時間の差を示す．数値解析例として**図-3** に示したモデルの縦横比が 3：1 である，300×100cm の片持ち梁とし，自由端に集中荷重を加えた．**図-５**，**図-６**にスピードアップ，並列効率とプロセッサ台数との関係を示す．これらの図からプロセッサ数を増やすにつれ，確実に解析時間のスピードアップが図られていることが分かる．

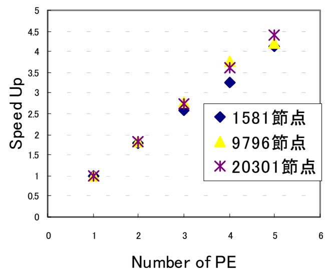

図-５プロセッサ台数ースピードアップ関係図

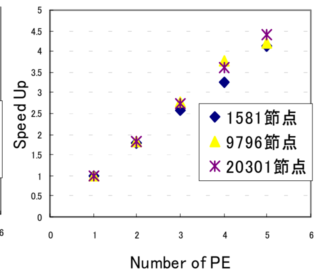

図-６プロセッサ台数ースピードアップ関係図

５．　おわりに

本研究ではFMMでの精度的問題点を，局所要素として回転自由度を有する３節点三角形要素を用いることで解決し，解析時間の問題点に対しても並列化することにより良好な結果を得た．

謝辞：本研究は，高橋財団からご支援を受けました。ここに記して感謝の意を表します。

参考文献

1）G.Yagawa and T.Yamada, Free mesh method:A new meshless method, Computional Mechanics, 18, pp.383-386, 1996

2）前田重行，渡部正則，武田洋：面内回転自由度を有する平面応力要素に関する考察，構造工学における数値解析シンポジウム論文集　第15巻, pp.139-144, 1991

3）富山潤：コンクリートの引張破壊挙動に関する解析的研究，琉球大学，琉球大学博士論文，2000.3