ハイアラーキ特異要素による局所応力解析

函館工業高等専門学校　正員　○渡辺　力
長岡技術科学大学　名誉教授　正員　林　正
川田テクノシステム株式会社　正員　齋藤道生

1.　まえがき

ハイアラーキ有限要素法では，大型要素を用いた粗い要素分割により大型構造物の全体解析を効率的に行うことができるが，隅角部などの特異点では級数の収束性が悪くなるので，1/4 写像点を用いた特異要素を使用して解の精度を上げることができる[1),2)].

しかし，1/4 点写像による特異要素では，特異点を要素内に一個しか生成できないので，薄肉構造解析などで腹板の上下の隅角部に特異点があるときには腹板を分割しなくてはならない．

本報告では，特異多項式を写像関数に用いて特異要素を生成する方法を提案する．この手法では，複数の特異点を有する多特異点要素を生成することができ，特異写像のための 1/4 点の座標値を入力する必要がない．本手法により，特異点近傍の応力集中問題に対して，大型要素を用いたハイアラーキ有限要素法による効率的で高精度の局所応力解析を行うことができる．

2.　特異写像関数

(1)　特異多項式

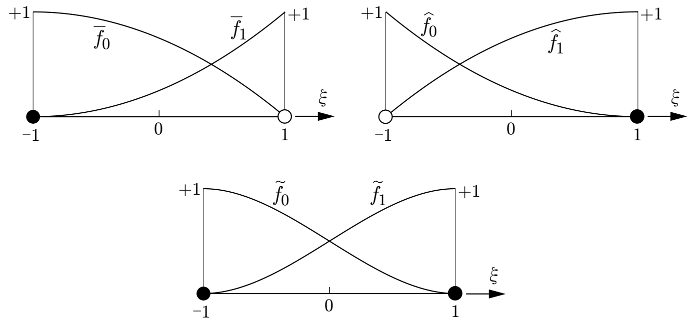
変位の補間に用いられるハイアラーキ多項式 f_m は次式で与えられる[1)].

$$f_m(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1+\xi_0) & (m=0,1) \\ (1-\xi^2)\,\xi^{m-2} & (m \geqq 2) \end{cases} \tag{1}$$

ここに $m=0,1$ は両端の節点，$m\geqq 2$ は節線の補間多項式である．また，$\xi_0\,(=\xi_m\,\xi)$ は変数で，ξ は自然座標，ξ_m は節点 m の座標値 ±1 である．

特異多項式は，**図–1** に示すように形状関数の基本的性質を満たし，その導関数が図の●印の片側または両側の特異節点でゼロになる 3 つの場合を考えると，特異多項式は 6 通りある．この特異性を補助関数 f_k^* で表し，特異多項式を式 (1) の正則な多項式 f_m と補助関数の積で与える．

$$\overline{f}_m(\xi) = f_m\, f_1^*, \quad \widehat{f}_m(\xi) = f_m\, f_2^*, \quad \widetilde{f}_m(\xi) = f_m\, f_3^* \tag{2}$$



図–1　特異多項式

ここに，

$$f_1^*(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2}(3+\xi) \\ \frac{1}{2}(1+\xi) \end{cases}, \quad f_2^*(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1-\xi) \\ \frac{1}{2}(3-\xi) \end{cases}$$
$$f_3^*(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2}(2+\xi)(1-\xi) & (m=0) \\ \frac{1}{2}(2-\xi)(1+\xi) & (m=1) \end{cases} \tag{3}$$

なお，節点の補間多項式には次式の関係がある．

$$\left.\begin{array}{l} \overline{f}_0+\overline{f}_1=1, \quad \widehat{f}_0+\widehat{f}_1=1, \quad \widetilde{f}_0+\widetilde{f}_1=1 \\ f_0+f_1=1 \end{array}\right\} \tag{4}$$

(2)　特異写像関数

ハイアラーキ要素では，変位の補間に用いる形状関数 N_{mn} は式 (1) の二重積で与えられる[1)].

$$N_{mn} = f_m(\xi)\, f_n(\eta) \tag{5}$$

特異写像関数 $\widehat{N}_{mn}$ は，式 (2) の特異多項式の二重積で与える．これを式 (5) の形状関数 N_{mn} と補助関数 f_k^* を用いて次式のように表す．

$$\widehat{N}_{mn} = f_m(\xi)\, f_n(\eta) \equiv N_{mn}\, f_j^*\, f_k^* \tag{6}$$

ここで f_m などの上付記号は省略している．なお，非特異の場合には f_k^* を省略する．

式 (6) の写像関数は，剛体変位の条件 $\sum \widehat{N}_i = 1$ を満たさない場合がある．このときには，形状関数の基本的性質を考慮して補助関数の二重積の項を次式の和に修正する．

$$f_j^*\, f_k^* \Longrightarrow f_j^*(\xi) + f_k^*(\eta) - 1 \quad (\,j,k=1\sim 3\,) \tag{7}$$

Key Words: ハイアラーキ特異要素, 特異写像関数, 局所応力解析
〒 042–8501 函館市戸倉町 14–1，TEL:0138–59–6488，FAX:0138–59–6488

特異写像では，式 (6) を写像関数に用いる．

$$x = \sum_{i=1}^{4} \widehat{N}_i(\xi, \eta)\, x_i \tag{8}$$

y も同様に表す．(x_i, y_i) は節点座標値である．

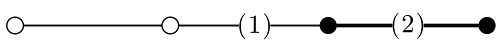
3.　特異要素

(1)　四辺形要素

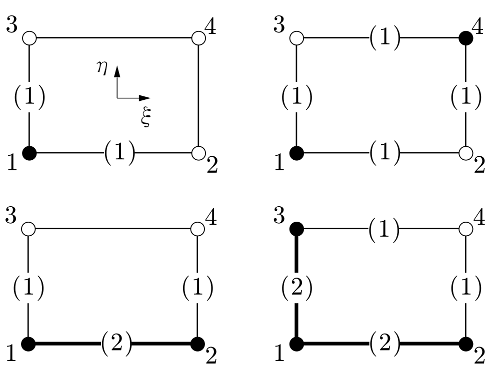
複雑な構造物を効率的に解析するためには，複数の特異点をもつ多特異点要素が必要になる．特異写像関数を用いる手法では，補助関数を組み合わせて種々の多特異点要素を容易に求めることができる．

多特異点要素では節点間の節線が特異線になるので，線荷重が作用する場合や線支承，部材が結合する隅角線などの応力集中問題に対して効果がある．

図–2 に，節点間の補助関数の次数を ( ) で示す．● 印は特異点，太線は特異線を表し，○印と細線上で要素の Jacobian は正則である．また，各要素の補助関数の次数を**図–3** に示す．



図–2　特異節点間の補助関数の次数



図–3　四辺形特異要素の補助関数の次数

(2)　1 特異点要素

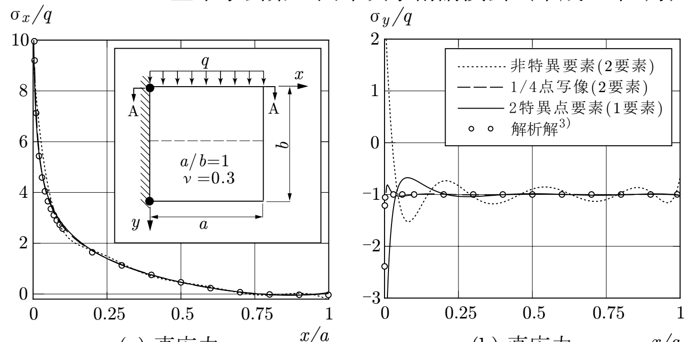
節点 1 が特異点になる特異写像関数は次式で与えられる．

$$\left.\begin{aligned} \widehat{N}_1 &= \overline{f}_0\,\overline{f}_0\,, \quad \widehat{N}_2 = \overline{f}_1\, f_0 \\ \widehat{N}_3 &= f_0\,\overline{f}_1\,, \quad \widehat{N}_4 = f_1\, f_1 \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

式 (9) は剛体変位の条件を満たさないので，$\widehat{N}_1$ に現れる補助関数の二重積を式 (7) により和に修正した関数を式 (8) に代入して写像の式が得られる．

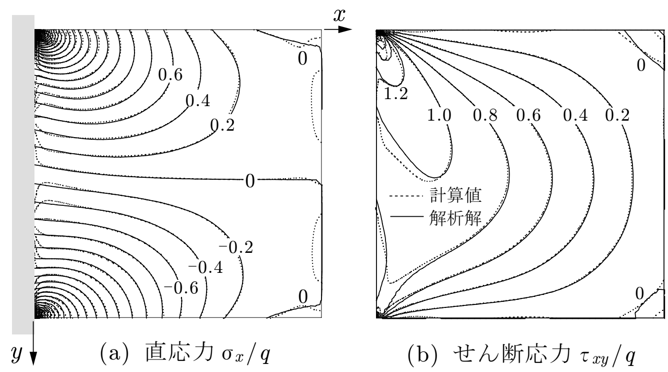
$$x = \frac{1}{8}(1+\xi_0)\,(1+\eta_0)\left[\,(4+\xi+\eta)\,x_1 + (1+\xi)\,x_2 + (1+\eta)\,x_3 + 2\,x_4\right] \tag{10}$$

y も同様な式が得られる．Jacobi 行列は節点 1 $(-1,-1)$ で特異，その他の節点で正則である．



(a) 直応力 σ_x　　　(b) 直応力 σ_y

図–4　A–A 線上の直応力 (M=N=8 次式)



(a) 直応力 σ_x/q　　　(b) せん断応力 τ_{xy}/q

図–5　片持ち板の応力 (2 特異点要素)

(3)　隣接 2 特異点要素

節線の両端節点 1, 2 に 2 個の特異点をもつ特異写像関数は，式 (6) より次のようになる．

$$\left.\begin{aligned} \widehat{N}_1 &= \widetilde{f}_0\,\overline{f}_0\,, \quad \widehat{N}_2 = \widetilde{f}_1\,\overline{f}_0 \\ \widehat{N}_3 &= f_0\,\overline{f}_1\,, \quad \widehat{N}_4 = f_1\,\overline{f}_1 \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

二重積を和に修正して次式が得られる．

$$x = \frac{1}{8}(1+\xi_0)\,(1+\eta_0)\left[\,(3+\xi_0-\xi^2+\eta)\,(x_1+x_2) + (1+\eta)\,(x_3+x_4)\right] \tag{12}$$

4.　数値計算例

図–4 の図中に示す等分布荷重 q を受ける完全固定支持された片持ち板について，特異要素の精度を調べる．要素分割せずに式 (12) の隣接 2 特異点要素を用いた結果と，2 要素に分割した非特異要素と 1/4 点写像による特異要素の値を解析解[3)]と比較する．

図–4 に A–A 線上の σ_x と σ_y を，**図–5** に σ_x と τ_{xy} の分布図を示す．本計算例では固定端 (x=0) の上下端が特異になるために，非特異要素では応力が振動する傾向があるが，特異要素では振動が小さくなる．また，2 特異点要素では，要素分割をしなくても要素内の任意の点で解析解に良く一致した解が得られている．なお，式 (10) の 1 特異点要素の式は，1/4 点による特異写像の式と完全に一致する．

参考文献

1) 林　他：土木学会論文集, No.591/I-43, 1998.
2) 林　他：土木学会論文集, No.654/I-52, 2000.
3) 小林　他：日本機械学会論文集 (第 1 部), 1976.