不確実性・不可逆性を考慮した複数施設の建設順序決定問題

京都大学大学院　学生会員　竹内 洋之　日本建設コンサルタント　正会員　武部 晃尚
鳥取大学工学部　正会員　横松 宗太　京都大学大学院　正会員　小林 潔司

1.　はじめに

公共施設は社会のインフラストラクチャーとして，民間主体の生産活動をはじめ地域や一国の経済成長を規定する．公共施設はひとたび整備されるとその影響が非常に遠い将来にまで及ぶ．そのように時間軸上の個々の時点で発生する効果（便益）を投資の意思決定時点で正確に予想することは不可能である．公共投資は便益の不確実性，投資費用の不可逆性を備えている．

また，多くの施設はそれぞれ単独で地域の発展に対して影響を与えるが，一方で関連する複数の施設が共存することによって，それらが相乗的な効果を発揮することがある．例えば研究施設と通信･交通施設の関係が挙げられる．しかし，従来の費用便益分析は，１つ目の施設整備（例えば研究施設）を評価する際に，当該施設が将来他の施設（例えば通信･交通施設）が整備された時点で発生する便益を大きくするような効果を考慮に入れていない．初期段階の公共施設整備の価値は過小に評価されてきたといえる．本研究は公共プロジェクトの投資機会をリアルオプションとして捉える．その上で，将来，関連して機能する他の公共施設が整備される可能性を考慮した，新しい公共施設整備の意思決定ルールを導出することを目的とする．本稿では公共施設整備の便益の定式化について紹介する．

2.　公共施設の便益過程の定式化

２つの施設α,βを対象とする．施設$x(=\alpha,\beta)$の整備状態を状態変数$s(=o,\alpha,\beta,\alpha\beta)$により表す．ここに，状態$o$はいずれの施設も存在しない状態を，状態$\alpha$，状態$\beta$はそれぞれ施設$\alpha$，施設$\beta$のみが存在する状態を，状態$\alpha\beta$は双方の施設が存在する状態を表す．施設$x(=\alpha,\beta)$を整備することを投資$x$と呼ぶ．

無限の将来にわたる連続的な時間軸を考える．ある時刻における公共施設の便益のフロー$B_s(t)$ $(s=\alpha,\beta,\alpha\beta)$を，当該時刻の状態$o$との社会厚生の差によって表現する．各便益$B_s(t)$は確率過程に従う．時刻$t$においては，全ての整備状況における便益（潜在的便益）のフロー$\boldsymbol{B}(t)=(B_\alpha(t),B_\beta(t),B_{\alpha\beta}(t))$を知ることができると仮定する．意思決定者は便益の実現値$\hat{\boldsymbol{B}}(t)$を確認した上で投資の意思決定を行い，社会は状態に対応する便益$\hat{B}_s(t)$を享受することができる．次の時刻以降の便益の予測は，その時刻までの実現値$\hat{B}_s(t')$ $(t'\leq t)$に基づいてなされる．また，時刻tに施設xを整備して状態sが生起したときに得られる便益$B^0_s(t)$ $(s=\alpha,\beta,\alpha\beta)$を初期便益と呼ぶ．状態$s=\alpha,\beta$の初期便益は以下のブラウン運動に従うと仮定する．

$$dB^0_\alpha(t)=\sigma^0_\alpha dW(t)+\eta^0_\alpha dW_\alpha(t) \tag{1}$$
$$dB^0_\beta(t)=\sigma^0_\beta dW(t)+\eta^0_\beta dW_\beta(t) \tag{2}$$

$W(t),W_\alpha(t),W_\beta(t)$はそれぞれ互いに独立な標準ブラウン運動である．$W(t)$は一国の景気を表すようなマクロな確率変動を表し，$W_\alpha(t),W_\beta(t)$は施設に特有な確率変動を表す．$B^0_\alpha(t)$と$B^0_\beta(t)$は$W(t)$を介して相関している．$\sigma^0_\alpha,\sigma^0_\beta,\eta^0_\alpha,\eta^0_\beta$は定数である．また状態$s=\alpha\beta$の初期便益の変動過程は以下のように表される．

$$\begin{aligned}dB^0_{\alpha\beta}(t)&=(\sigma^0_\alpha+\sigma^0_\beta)dW(t)\\&\quad+\eta^0_\alpha dW_\alpha(t)+\eta^0_\beta dW_\beta(t)\ (\text{状態}\ o\rightarrow\alpha\beta\text{のとき})\end{aligned} \tag{3}$$
$$\begin{aligned}dB^0_{\alpha\beta}(t)&=\delta_\alpha dt+(\sigma^0_\alpha+\sigma^0_\beta)dW(t)\\&\quad+\eta^0_\alpha dW_\alpha(t)+\eta^0_\beta dW_\beta(t)\quad(\text{状態}\alpha\rightarrow\alpha\beta\text{のとき})\end{aligned} \tag{4}$$
$$\begin{aligned}dB^0_{\alpha\beta}(t)&=\delta_\beta dt+(\sigma^0_\alpha+\sigma^0_\beta)dW(t)\\&\quad+\eta^0_\alpha dW_\alpha(t)+\eta^0_\beta dW_\beta(t)\quad(\text{状態}\beta\rightarrow\alpha\beta\text{のとき})\end{aligned} \tag{5}$$

式(3)は両方の施設を同時に整備した場合の初期便益である．また，式(4),(5)はそれぞれ施設α，施設βが既に存在するときに，もう一方の施設を整備することによって状態$\alpha\beta$が生起した場合の初期便益である．本研究では，たとえある時点で社会が状態$\alpha\beta$に到達したとしても，それらを同時に整備して達成した場合と段階的に整備して達成した場合とでは社会厚生が異なると考える．あらかじめ一方の施設を整備していたことにより状態$\alpha\beta$の初期便益が増加する効果を，式(4),(5)においてドリフト$\delta_\alpha,\delta_\beta(=\text{const.})$により表現する．また，投資が行われた後の便益$B_s(t)$の変動過程は以下に示すようにドリフトをもつブラウン運動に従うと仮定する．

$$dB_\alpha(t)=\mu_\alpha dt+\sigma_\alpha dW(t)+\eta_\alpha dW_\alpha(t) \tag{6}$$
$$dB_\beta(t)=\mu_\beta dt+\sigma_\beta dW(t)+\eta_\beta dW_\beta(t) \tag{7}$$
$$\begin{aligned}dB_{\alpha\beta}(t)&=(\mu_\alpha+\mu_\beta+\tilde{\mu})dt+(\sigma_\alpha+\sigma_\beta)dW(t)\\&\quad+\eta_\alpha dW_\alpha(t)+\eta_\beta dW_\beta(t)\end{aligned} \tag{8}$$

$\mu_\alpha,\mu_\beta,\tilde{\mu},\sigma_\alpha,\sigma_\beta,\eta_\alpha,\eta_\beta$は定数である．$\tilde{\mu}$は両方の施設が同時に存在することによる相乗効果を意味する．表記の簡単化のため$\mu_{\alpha\beta}=\mu_\alpha+\mu_\beta+\tilde{\mu}$，$\sigma_{\alpha\beta}=\sigma_\alpha+\sigma_\beta$と記す．

3.　再帰方程式の定式化

公共投資，不確実性，不可逆性，リアルオプション
〒606-8501　京都市左京区吉田本町　TEL,FAX　075-753-5073

第１段階の投資x $(=\alpha,\beta)$が行われた時刻をθ_x^1と表す．時刻tにおける最適値関数は$F=F(\hat{\boldsymbol{B}}(t),s,\theta_x^1)$と定義される．ただし状態$o$は$\theta_x^1=\phi$として扱うが，以降は$\theta_x^1$の表記を省略する．また，無限期間の問題なので当該期価値最適値関数を扱うことができる．状態oにおける再帰方程式は次式のように表される．

$$\begin{aligned}&F(\hat{\boldsymbol{B}}(t),o)\\&=\max\Bigg[\hat{B}_\alpha(t)dt+\frac{E\Big[F(\boldsymbol{B}(t+dt),\alpha)|\hat{\boldsymbol{B}}(t)\Big]}{1+\rho dt}-I_\alpha,\\&\quad\hat{B}_\beta(t)dt+\frac{E\Big[F(\boldsymbol{B}(t+dt),\beta)|\hat{\boldsymbol{B}}(t)\Big]}{1+\rho dt}-I_\beta,\\&\quad\hat{B}_{\alpha\beta}(t)dt+\frac{E\Big[F(\boldsymbol{B}(t+dt),\alpha\beta)|\hat{\boldsymbol{B}}(t)\Big]}{1+\rho dt}-I_\alpha-I_\beta,\\&\quad\frac{E\Big[F(\boldsymbol{B}(t+dt),o)|\hat{\boldsymbol{B}}(t)\Big]}{1+\rho dt}\Bigg]\end{aligned}\tag{9}$$

ただし$E[\cdot|\hat{\boldsymbol{B}}(t)]$は$\hat{\boldsymbol{B}}(t)$が実現した下での期待値操作を表す．$I_x(x=\alpha,\beta)$は施設$x$の投資費用で一定と仮定する．上式において，右辺の大括弧の第１式は時刻tに施設αを整備した場合，その後無限の将来にわたって獲得できる最大の期待便益の当該期価値を表している．第２式は施設βを整備した場合，第３式は施設αと施設βの両方を整備した場合，第４式は当該時刻tにおいては投資を行わずに次の期に意思決定を先送りする場合の期待便益の当該期価値を表している．時刻tにおける便益ベクトル$\hat{\boldsymbol{B}}(t)$を考慮した上で，４式のうち最も大きな値を示す式に対応する行動が選択されることになる．以上のように状態oにおける意思決定問題は４つの選択肢の離散選択の問題となる．次に状態α，状態βにおける再帰方程式は以下のように表される．

$$\begin{aligned}&F(\hat{\boldsymbol{B}}(t),s')\\&=\max\Bigg[\hat{B}_{\alpha\beta}(t)dt+\frac{E\Big[F(\boldsymbol{B}(t+dt),\alpha\beta)|\hat{\boldsymbol{B}}(t)\Big]}{1+\rho dt}-I_{x'},\\&\quad\hat{B}_{s'}(t)dt+\frac{E\Big[F(\boldsymbol{B}(t+dt),s')|\hat{\boldsymbol{B}}(t)\Big]}{1+\rho dt}\Bigg]\ (s'=\alpha,\beta)\end{aligned}\tag{10}$$

右辺の第１式は時刻tで投資$x'(=\beta,\alpha)$を行った場合に獲得できる最大の期待便益の当該期価値であり，第２式は投資を行わなかった場合の価値である．また状態$\alpha\beta$の最適値関数は次式のように与えられる．

$$F(\hat{\boldsymbol{B}}(t),\alpha\beta)=E\Big[\int_t^\infty B_{\alpha\beta}(\tau)\exp\{-\rho(\tau-t)\}d\tau|\hat{\boldsymbol{B}}(t)\Big]\tag{11}$$

最適値関数$F(\cdot)$の関数形が既知のとき，便益の実現値$\hat{\boldsymbol{B}}(t)$を用いて関数の値を計算することによって，最適投資行動を決定することができる．

4. 最適値関数の導出方法

最適値関数$F(\cdot)$が各B_sに関して単調増加関数であると仮定しよう．いま便益B_sに着目し，他の要素$B_{s'}$ $(s'\neq s)$を所与とすると，B_sの大きさがある境界値B_s^{*x}を越えたときに投資xの行動が変化するような値(critical value)B_s^{*x}が存在する．ここでは境界値B_s^{*x}と最適値関数F $(\hat{\boldsymbol{B}}$ (t) $,s)$を同時に求める方法について紹介する．

状態sに関して後ろ向きに解いていく．状態$(\hat{\boldsymbol{B}}(t),\alpha\beta)$においては，式(11)より$F(\hat{\boldsymbol{B}}(t),\alpha\beta)$が求まる．

$$F(\hat{\boldsymbol{B}}(t),\alpha\beta)=\frac{\hat{B}_{\alpha\beta}(t)}{\rho}+\frac{\mu_{\alpha\beta}}{\rho^2}\tag{12}$$

次に状態$(\hat{\boldsymbol{B}}(t),\alpha)$にあるとする．式(10)の$F(\boldsymbol{B}(t+dt),\alpha\beta)$に式(12)を代入して整理すると，

$$\begin{aligned}&F(\hat{\boldsymbol{B}},\alpha)\\&=\max\Bigg[\hat{B}_{\alpha\beta}dt+\frac{1}{1+\rho dt}\left\{\frac{\hat{B}_{\alpha\beta}+\mu_{\alpha\beta}dt}{\rho}+\frac{\mu_{\alpha\beta}}{\rho^2}\right\}\\&-I_\beta,\ \hat{B}_\alpha dt+\frac{F(\hat{\boldsymbol{B}},\alpha)+E\Big[dF(\boldsymbol{B},\alpha)|\hat{\boldsymbol{B}}\Big]}{1+\rho dt}\Bigg]\end{aligned}\tag{13}$$

便益$\hat{\boldsymbol{B}}$のもとで待機することを選択する場合を考えよう．左辺$F(\hat{\boldsymbol{B}},\alpha)$と右辺の第２式を結ぶ方程式を解く．$F(\hat{\boldsymbol{B}},\alpha)$が$B_\alpha$と$B_{\alpha\beta}$の関数であることに注意して伊藤のレンマを適用し，$(dt)^2=0$と近似すると以下の２階の偏微分方程式を得る．

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}(\sigma_\alpha^2+\eta_\alpha^2)F_{\alpha\alpha}+(\sigma_\alpha\sigma_{\alpha\beta}+\eta_\alpha^2)F_{\alpha(\alpha\beta)}\\&+\frac{1}{2}(\sigma_{\alpha\beta}^2+\eta_\alpha^2+\eta_\beta^2)F_{(\alpha\beta)(\alpha\beta)}+\mu_\alpha F_\alpha+\mu_{\alpha\beta}F_{(\alpha\beta)}\\&-\rho F+B_\alpha=0\end{aligned}\tag{14}$$

Fの下付$_{\alpha,(\alpha\beta)}$はそれぞれ$B_\alpha(t),B_{\alpha\beta}(t)$に関する偏微分を表す．一方，$F(\cdot)$の値は$B_s^{*\beta}$において投資$\beta$を行った際の便益の当該期価値（式(13)の右辺の第１式）と等しくなる．さらに$B_s^{*\beta}$において，待機する場合の$F(\cdot)$と投資をする場合の$F(\cdot)$は滑らかに接続していなければならない．すなわち境界値$B_s=B_s^{*\beta}$は以下のValue-Matching条件，Smooth-Pasting条件[1)]を満たす．

$$F(B_\alpha^{*\beta},B_{\alpha\beta}^{*\beta},\alpha)=\frac{B_{\alpha\beta}^{*\beta}}{\rho}+\frac{\mu_{\alpha\beta}}{\rho^2}-I_\beta\tag{15}$$

$$F_\alpha(B_\alpha^{*\beta},B_{\alpha\beta}^{*\beta},\alpha)=0\tag{16}$$

$$F_{(\alpha\beta)}(B_\alpha^{*\beta},B_{\alpha\beta}^{*\beta},\alpha)=\frac{1}{\rho}\tag{17}$$

$F(\cdot)$と$B_s^{*\beta}$は境界条件(15)(16)(17)のもとで偏微分方程式(14)を解くことにより求められる．状態β，状態oにおける最適投資問題も同様の方法で解くことができる．

5. おわりに

本研究ではReal Options Approachにより複数の公共施設整備の意思決定ルールを導くことを目的としている．本稿では時間軸上で不確実に変動する施設の便益の変動過程の定式化について紹介した．紙面の制約上，最適値関数の分析結果については講演時に発表する．

参考文献

[1] Dixit,A.K., Pindyck,R.S：Investment under Uncertainty, Princeton University Press, 1994.

土木学会第56回年次学術講演会（平成13年10月）