

2次元移流分散問題への SUPG 法の適用における要素サイズの算定に関する一考察

神戸大学大学院自然科学研究科 学生員 ○野沢 修介
 神戸大学大学院自然科学研究科 学生員 蓮井 一雄
 神戸大学都市安全研究センター 正会員 齋藤 雅彦
 神戸大学都市安全研究センター 正会員 川谷 健

1. はじめに

有限要素法による2次元の移流分散現象の数値解析に SUPG (Streamline Upwind Petrov-Galerkin) 法¹⁾を適用する場合、離散化のための最適な重み関数を決めるには、要素ごとの Peclet 数を適切に算定する必要がある。そして、SUPG 法では、Peclet 数に用いる代表長さは流線に沿って測った要素の代表長さあるいは節点間距離の代表値である。すなわち、要素の代表長（以下、要素サイズという）は流向によって異なる。したがって SUPG 法による有限要素解析の精度向上には、「流線方向の要素サイズ」を適切に算定することが重要となる。特に、例えば、帯水層への塩水侵入を地下水流の場合における塩分の移流分散現象として解析する場合のように、塩水侵入域に循環流が存在するときは、要素サイズの算定方法が解析の精度と安定に大きな影響をもつ。

本研究では、流線方向の要素サイズの算定方法と数値解の精度の関係を、1次元の移流分散現象において調べた。また、その結果を用いて被圧帯水層への塩水侵入の解析を行い、解の信頼性を検討した。

2. 要素サイズの算定方法

要素サイズは、ここでは次の3通りの方法で算定する。図-1を参照して、
 (Type1): 要素の対角線 $\overline{jk}$, $\overline{mn}$ の流れ方向への投影長さ $\overline{ab}$, $\overline{cd}$ のうち、大きい方を要素サイズとする。
 (Type2): 対角線の投影長さ $\overline{ab}$, $\overline{cd}$ の平均値を要素サイズとする。
 (Type3): 流れに垂直な要素幅 $\overline{ef}$ で要素の面積を割った値、すなわち幅が要素への流入幅 $\overline{ef}$ に等しく、面積が要素面積に等しい長方形の辺長を要素サイズとする。

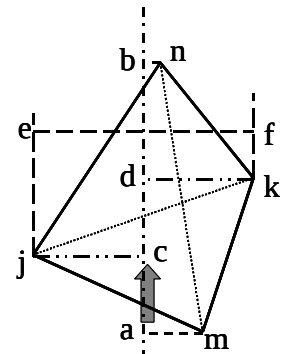


図-1 要素サイズ

3. 解析精度の検討

要素サイズによる数値解の精度の違いを、つぎの1次元定常移流分散方程式によって検討する。すなわち、

$$-\frac{d^2C}{dx^2} + u \frac{dC}{dx} = x^2, \quad (0 \leq x \leq 1), \quad \text{境界条件: } C=0 \text{ for } x=0 \text{ and } x=1.$$

ここに、 C は濃度、 u は流速である。厳密解は

$$C = \frac{1}{3u}x^3 + \frac{1}{u^2}x^2 + \frac{2}{u^3}x + \frac{1}{1-e^u} \left(\frac{2}{u^3} + \frac{1}{u^2} + \frac{1}{3u} \right) e^{ux} + \frac{1}{e^u - 1} \left(\frac{2}{u^3} + \frac{1}{u^2} + \frac{1}{3u} \right)$$

である。

要素分割を図-2に示す。要素のうち3要素は、要素境界のいずれもが流向に垂直でないよう配置してある。

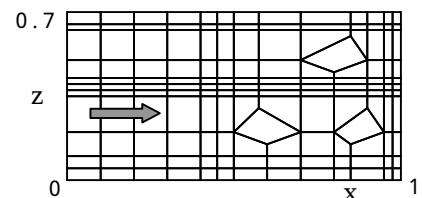


図-2 要素分割

図-3に、要素サイズが Type3 の場合の濃度分布を示す。Type1 および Type2 の場合も、定性的にはほぼ同様の分布となった。また図-4に、 $z=0.1$ 上の、濃度の数値解(C_n)と厳密解(C_t)の差を示す。図-3に示すように、本来 $x = \text{const.}$ 上で一定であるべき濃度が、要素境界が流向に垂直でない3つの要素の近傍で、異なる値となっている。そしてその違いは、3要素においてではなく、

移流分散, 有限要素法, SUPG 法, 要素サイズ, Peclet 数

〒657-8501 神戸市灘区六甲台町 神戸大学都市安全研究センター, Tel. 078-803-6055, Fax. 078-803-6394

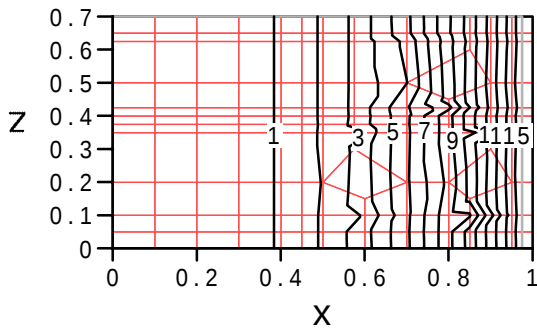


図-3 濃度分布(Type3)

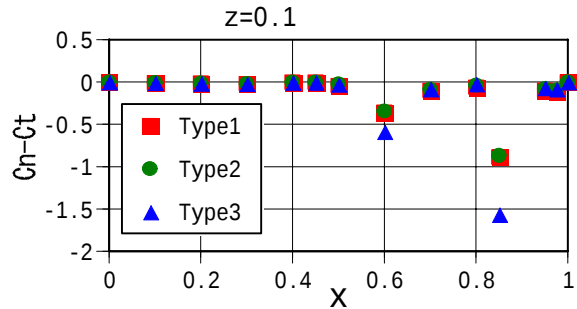


図-4 数値解(Cn)と厳密解(Ct)の差

それらに隣接する台形の要素において大きくなっている．すなわち， $z = 0.1, 0.35, 0.425, 0.625$ 上の節点で，その他の節点での濃度との差が大きくなっている．要素サイズの算定方法に関しては，図-4に示すように，Type3(要素への流入幅を用いる方法)の場合に厳密解との差が最も大きくなっている．この場合，誤差の最大値は厳密解のほぼ 15% である．また数値解は，いずれの算定方法でも厳密解より小さくなっている．なお，Type1 と Type2 を詳細に比較した結果では，Type2 の方がわずかに誤差が小さいことが明らかになった．

4. 解析例(被圧帯水層への塩水侵入)

移流分散現象の有限要素解析例として，図-5に示すような，被圧帯水層への塩水侵入をとりあげる．この解析では SUPG 法を適用し，また要素ごとの Peclet 数は上述の結果から Type2 によって算定する．

移流分散方程式および地下水流の基礎方程式は，無次元化すると，それぞれ

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\theta \lambda_{ij} \frac{\partial C}{\partial x_j} \right) - q_i \frac{\partial C}{\partial x_i} = 0 \cdots (1) \quad \text{および} \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{k_{ij}}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{\rho g L}{P} \frac{\partial x_3}{\partial x_j} \right) \right\} = 0 \cdots (2) \quad \text{である.}$$

またダルシー流速は $q_i = -\frac{k_{ij}}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{\rho g L}{P} \frac{\partial x_3}{\partial x_j} \right)$ である．ここに， C は塩分濃度， λ_{ij} は無次元の分散係数，

θ は間隙率， q_i は無次元流速， p は無次元の水圧， k_{ij} は無次元の固有透過度， μ は無次元の粘性係数， x_i は

無次元座標， ρ は密度， g は重力加速度， L と P はそれ

ぞれ長さと水圧の代表値である．無次元の分散係数 λ_{ij} は

無次元流速 q_i の関数である．また密度 ρ は塩分濃度 C によって変わるので， q_i は C の関数である．したがって，式(1)と(2)を連立させて解く．

図-6に，解析結果として $C=0.9$ と $C=0.1$ の等濃度線を示す．ここには，淡水と塩水が非混合として，Ghyben-Herzberg の近似を適用した場合の解も，一点鎖線で示してある．

これらの結果から，ここで用いた手法は妥当であり，数値解は信頼性の高いものと考えられる．

(参考文献) 1) Zienkiewicz, O.C. & Taylor, R.L., Finite Element Method, Vol.3, 13-32, 2000.

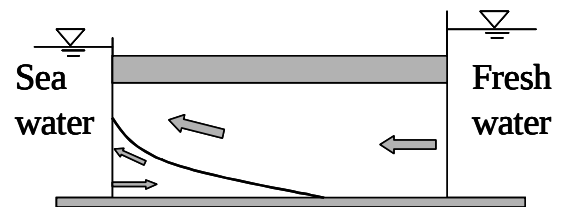


図-5 解析モデル(被圧帯水層への塩水侵入)

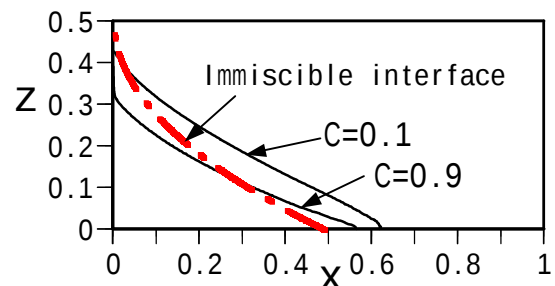


図-6 塩水侵入域