

圧縮供試体における拡散型分岐後挙動と不連続せん断帯モードの発生条件について

長岡技術科学大学 環境・建設系 正会員 ○ 山川 優樹
 東北大学大学院 工学研究科 正会員 池田 清宏
 東北大学大学院 情報科学研究科 正会員 寺田 賢二郎
 長岡技術科学大学 環境・建設系 正会員 鳥居 邦夫

1. はじめに

地盤材料の要素試験では、ある特徴を有する典型的な局所変形モードやせん断帯の形成がしばしば観察される。本研究では、圧縮せん断供試体の分岐モードおよび分岐後挙動の弾塑性分岐解析を行う。また、材料不安定に起因する不連続せん断帯モードの発生条件の判定によりせん断帯の発生予測を行い、供試体の変形の局所化進展過程における拡散型分岐モードと不連続せん断帯モードとの関連について調べる。

2. Hill の弾塑性分岐条件

本研究では擬似分岐解析ではなく、基本つり合い経路上の分岐点と分岐モードを求めて分岐経路へ切替えることにより、完全系の分岐解析を行うため、分岐点の判定条件について述べる。Hill (1958) の弾塑性分岐条件によると、

$$I := \int_B [\mathcal{L}_v \tau^* : \text{sym}[v^* \otimes \nabla x] + \tau : [(v^* \otimes \nabla x)^T \cdot (v^* \otimes \nabla x)]] dV = 0 \quad (1)$$

を満たす非自明な解 $v^* \neq 0$ が存在するとき、基本経路とは異なるモードの分岐が発生する。上付き (*) は、基本経路と分岐経路にそれぞれ対応する相異なる 2 つの解 v^0, v^1 が存在すると仮定した場合に、各々に対応する量の差を取ったものであることを示す (図-1)。節点変位増分を ΔU として式 (1) を有限要素離散化すると $I = \Delta U^* K \Delta U = 0$ となることより、接線剛性マトリックス K の特異性条件

$$\det K = 0 \quad (2)$$

を判定することにより、式 (1) と等価な条件として分岐点 (あるいは荷重極限点) を求めることができる。

3. 不連続せん断帯モードとその発生条件

ここでは、弾塑性有限変形における不連続せん断帯モードとその発生条件について述べる。図-2 に示すように内部に変形の不連続面 Γ が存在する物体 B を考えると、 Γ の近傍 $\Omega_\Gamma \subset B$ における変形写像 $\varphi(X)$ と変形勾配 F は、

$$\varphi(X) = \bar{\varphi}(X) + [[\varphi]] H_\Gamma(X), \quad F = \varphi \otimes \nabla_X = \bar{F} + \delta_\Gamma [[\varphi]] \otimes N_\Gamma, \quad \forall X \in \Omega_\Gamma \quad (3)$$

と表される。 $[[\varphi]]$ は変形の不連続量、 $H_\Gamma(X)$ は Heaviside のステップ関数、 δ_Γ は Dirac のデルタ関数、 N_Γ は Γ の単位法線である。式 (3)₂ の変形勾配 F は、変形写像 φ の連続・不連続部分に対応する部分 $\bar{F}, \tilde{F}$ に乗算型分解して、

$$F = \bar{F} \cdot \tilde{F}, \quad \bar{F} = \bar{\varphi} \otimes \nabla_X, \quad \tilde{F} = 1 + \delta_\Gamma (\bar{F}^{-1} \cdot [[\varphi]]) \otimes N_\Gamma \quad (4)$$

と表すことができ、これより変形速度 $d := \text{sym}[\dot{l}] = \text{sym}[(\dot{\bar{F}} \cdot \bar{F}^{-1})|_{F=\bar{F}}]$ を求めると、加算分解の形で

$$d = \bar{d} + \tilde{d}, \quad \bar{d} := \text{sym}[\dot{\bar{F}} \cdot \bar{F}^{-1}], \quad \tilde{d} := \delta_\Gamma \text{sym}[\mathcal{L}_v [[\varphi]] \otimes n_\gamma] \quad (5)$$

となる。ここで $n_\gamma := \bar{F} \cdot N_\Gamma$ は N_Γ の現配置表示であり、 $\mathcal{L}_v [[\varphi]] := \bar{F} \cdot (\bar{F}^{-1} \cdot [[\varphi]])'$ は $[[\varphi]]$ の Lie 微分である。以上より、不連続面 Γ 上での変形挙動は、法線 n_γ 、および不連続変位速度 $\mathcal{L}_v [[\varphi]]$ により表される。

次に、不連続せん断帯モードの発生条件を導く。Kirchhoff 応力 τ の Lie 微分と接線係数 c, a を用いて速度型弾塑性構成式を $\mathcal{L}_v \tau = c : d - a : d^p$ と表す。また、塑性パラメータ $q(\xi)$ を用いて降伏関数を $\phi(\tau, q(\xi)) \leq 0$ とする。不連続面 Γ において公称表面力速度 $\dot{T}_\Gamma$ は連続であり、その条件式は

$$[[\dot{T}_\Gamma]] = [[\dot{P}]] \cdot N_\Gamma = 0 \quad (6)$$

と与えられる。ここで $P = \tau \cdot F^{-T}$ は第 1 Piola-Kirchhoff 応力である。ところで、変形勾配 d は弾性・塑性部分に加算分解でき、また不連続面 Γ 近傍では Γ のみに塑性変形が局所化しているものとする、 $\bar{d}^p = 0, \tilde{d}^p = d^p$ である。公称表面力速度 $\dot{T}_\Gamma = \dot{P} \cdot N_\Gamma = (\mathcal{L}_v \tau + l \cdot \tau) \cdot n_\gamma = (c : \bar{d} + \bar{l} \cdot \tau) \cdot n_\gamma + (c : \tilde{d} - a : \tilde{d}^p + \tilde{l} \cdot \tau) \cdot n_\gamma$ の第 2 項は、式 (6) の条件よりゼロとなる。この $\dot{T}_\Gamma$ の連続性条件に、関連流れ則および塑性 consistency 条件 $\dot{\phi}(\tau, q(\xi)) = 0$ とその連続性条件式を適用し、さらに式 (5)₃ を用いると、局所化条件式

$$Q^{\text{ep}}(n_\gamma) \cdot \mathcal{L}_v [[\varphi]] = 0, \quad Q^{\text{ep}}(n_\gamma) := n_\gamma \cdot \bar{c}^{\text{ep}} \cdot n_\gamma + (n_\gamma \cdot \tau \cdot n_\gamma) 1, \quad \bar{c}^{\text{ep}} := c - \frac{(a : \frac{\partial \phi}{\partial \tau}) \otimes (a : \frac{\partial \phi}{\partial \tau})}{\frac{\partial \phi}{\partial \tau} : a : \frac{\partial \phi}{\partial \tau}} \quad (7)$$

を得る。ここで $\bar{c}^{\text{ep}}$ は硬化接線係数 $\frac{\partial \phi}{\partial q} H(\xi) \frac{\partial \phi}{\partial q}$ ($H(\xi) := \frac{\partial q(\xi)}{\partial \xi}$) をゼロとした弾・完全塑性接線係数であり、 $Q^{\text{ep}}(n_\gamma)$ はそのアコースティック・テンソルであるが、有限変形を考慮しているために幾何剛性項 (初期応力項) を含んだ形式になっている。式 (7)₁ は $\bar{c}^{\text{ep}}$ の強楕円性喪失条件式となっており、 $\det[Q^{\text{ep}}(n_\gamma)] = 0$ となるときに、 n_γ を法線に持つ不連続面 Γ と非自明な不連続変位速度 $\mathcal{L}_v [[\varphi]] \neq 0$ が存在する。

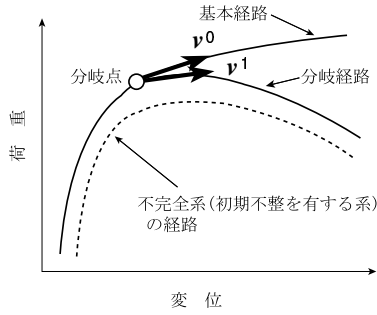
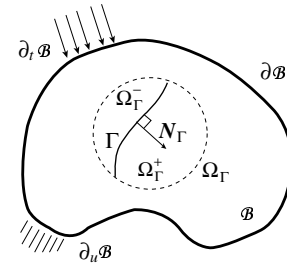


図-1 解の分岐の模式図

図-2 内部に不連続面 Γ を有する物体 B

4. 圧縮せん断供試体の分岐解析

平面ひずみ条件下で様な圧縮せん断変形を受ける供試体について、有限要素解析を行った。式 (2) により基本つり合い経路上の分岐点および分岐モードを求め、さらに分岐経路への切替えを行い、分岐後のつり合い経路を追跡することにより、分岐をきっかけとしたひずみ局所化の進展、および供試体の荷重不安定挙動について考察する。また、式 (7)₁ により不連続せん断帯モードの発生条件を判定し、破壊面の発生予測を行った。式 (2) に基づく分岐解析は供試体全体の变形モードに関わる拡散型分岐モードの解析であるのに対し、式 (7)₁ は pointwise な意味での材料不安定による不連続せん断帯モードの発生条件であり、有限要素解析においては各応力評価点 (数値積分点) において行われる。

解析モデルは幅 W_0 、高さ H_0 、形状比 $H_0/W_0 = 2.25$ の矩形平面ひずみ供試体で、上下端面は摩擦のない境界とし、供試体上端に様な圧縮変位 ΔH が作用するものとする。この場合、基本変形モードは様な二軸応力状態となる。材料は等方超弾性と Drucker-Prager の降伏規準による関連流れ則・硬化則に従うひずみ硬化型の弾塑性材料である。有限要素は均等分割の Crossed Triangles 要素を用い、要素数 20,736、節点数 10,525 である。

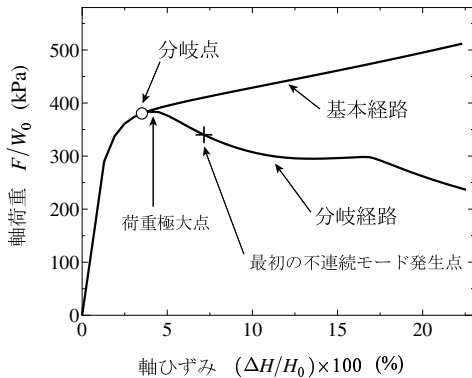


図-3 つり合い経路

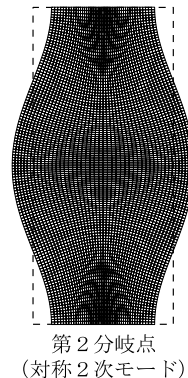


図-4 分岐モード



図-5 不連続モードの発生

解析により得られたつり合い経路を図-3に示す。一様変形が持続している基本経路上には、全部で12の分岐点を確認されたが、ここでは例として、経路上に(o)で示す第2分岐点について述べる。材料がひずみ硬化型であることと圧縮に伴う断面増加により基本経路では荷重は単調に増加しているが、分岐経路では分岐点の少し後に荷重極大点が存在してそれ以降は荷重が低下に転じ、さらに変形が進むとモード・ジャンプを生じて急速に軟化している。第2分岐点の分岐モードを図-4に示すが、これは実験でしばしば観察される破壊モードに類似したものである。次に、式 (7)₁ に基づいて不連続せん断帯モードの発生条件を判定した結果を図-5に示す。軸ひずみ $(\Delta H/H_0) \times 100 (\%) = 21.8 \%$ 時における変形の様子(実寸)と不連続モード発生条件を満たした要素の分布を示している。判定は各応力評価点において行い、発生条件が満たされた場合にはその要素は局所化したものとして黒色で塗りつぶしてある。また、せん断帯の発生を思わせるある幅を持ったバンド状領域にひずみが集中しており、それを外縁から挟むようにして不連続モードが発生している。図-3中の点(+)が最初に局所化条件が満たされた点であり、拡散型分岐モードが発生してひずみの局所化がかなり進行した後に不連続せん断帯モードが初めて発生することが分かる。なお、ここでは局所化条件が満たされた後も連続な変形が持続しているものとして通常の解析を進めており、特に不連続変形を導入する操作はしていないが、実際には不連続面に進展に伴って軟化が進行するため、これよりも急速に不連続面が進展するものと推測される。

5. 結論

供試体の荷重不安定は、拡散型分岐モードの発生をきっかけとしたひずみ局所化と除荷域の進展によってもたらされることを確認した。不連続せん断帯モードは、拡散型モードが発生してひずみの局所化がかなり進行した後に発生し得ることが分かった。またそれは、ある幅を持ったバンド状のひずみ集中域を外縁から挟むようにして供試体側面から線状に進展しており、この様子は粘性土のせん断試験において観察される現象と類似している。