

マルコフ・モデルのパラメータに関する一考察

鹿児島大学大学院 学生員 ○ 荒木 功平

鹿児島大学大学院 学生員 酒匂 一成

鹿児島大学工学部 正会員 北村 良介

1.はじめに

土の応力～ひずみ関係の解明を目的とした理論的、実験的研究が数多く行われてきている。これらの研究は2つに大別できる。1つは現象論的あるいは巨視的アプローチといわれ、弾塑性理論を援用するものである。もう1つは物性論的あるいは微視的アプローチといわれ、粒子や間隙流体の運動にもとづいて構成関係を導こうとするものである。北村は物性論的立場に立ち、マルコフ過程を適用して、砂質土のような粒状体のせん断挙動の解析を行った¹⁾。マルコフ過程を支配する基礎方程式は、放物型偏微分方程式であり、原理的には非定常現象である圧密、透水挙動に対して適用が可能である。本研究では、北村が提案した粒状体の力学モデル（以下、マルコフ・モデルと称する）を粒状体の種々の力学挙動へ適用する際に必要なパラメータについて考察を加えている。

2.モデルの概要

マルコフ・モデルは、不規則な形状・寸法の粒子からなる粒状土の三次元の応力場における応力～ひずみ関係を解析するものである。この解析で状態変数として粒子接点角 β を用いる。ここで粒子接点角とは、粒子接点における接平面が3主応力軸となす角としている。せん断過程での粒子の挙動は、確率分布で与えた初期粒子接点角をもつ粒子間の接平面が、せん断の推移とともに潜在すべり面に平行になるように指向するという仮説を導入して、マルコフ・モデルの基礎方程式の係数（drift vector と diffusion tensor）を決定している。マルコフ・モデルの場合は、パラメータ（ t に相当するもの）にはせん断応力の変化を用い、また状態の遷移過程には粒子間摩擦をもつ剛で変形しない粒子の移動の可逆と非可逆の可能性を定めるポテンシャル障壁の概念を導入している。さらに、ポテンシャル障壁をこえた粒子のうちいくらかは他の径路に落ち込み、落ち込んだ粒子のいくらかは側方径路へ割り込むとしている。このような不連続運動の生起確率はマルコフ過程とは独立に求め、マルコフ過程と連立させて応力～ひずみ関係を導いてきている。

確率変数の外圧による変化が求められると、統計的考察にもとづいて巨視的な物理量であるひずみが求まる。二次元マルコフ・モデルの基礎方程式²⁾は、(1)式のように非線形の放物型偏微分方程式であり、解析的に解くことは困難であるので、粒子の物性値を与えて差分近似を用いた数値解析によって解を求めている。

$$\frac{\partial}{\partial s} \omega(\beta, s) = -\frac{\partial}{\partial \beta} \{A(\beta, s) \cdot \omega(\beta, s)\} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \{B(\beta, s) \cdot \omega(\beta, s)\} \quad (1)$$

$$\text{ここに、} A(\beta, s) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \int_{-\infty}^{\infty} (\beta_{s+\Delta} - \beta_s) \cdot P(\beta_s, \beta_{s+\Delta}) d\beta \quad (2)$$

$$B(\beta, s) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta} \int_{-\infty}^{\infty} (\beta_{s+\Delta} - \beta_s)^2 \cdot P(\beta_s, \beta_{s+\Delta}) d\beta \quad (3)$$

$\omega(\beta, s)$ ：応力状態 s の変化に伴う接点角 β の分布を与える確率密度関数，

$A(\beta, s)$ ：接点角変化量の平均（drift vector），

$B(\beta, s)$ ：接点角変化量の二乗平均（diffusion tensor），

$P(\beta_s, \beta_{s+\Delta})$ ：接点角変化の遷移確率。

キーワード：マルコフ・モデル，応力～ひずみ関係，放物型偏微分方程式，砂質土，パラメータ

連絡先：〒890-0065 鹿児島県鹿児島市都元一丁目 21-40 鹿児島大学工学部海洋土木工学科北村研究室

3.考察

表-1 は、マルコフ・モデルの中で用いている物理量²⁾を示している。粒状体の応力～ひずみ関係を求めるためには、これらの物理量に加えて間隙比、粒子間物理摩擦係数、粒径加積曲線など従来の土質力学で用いられている物理量が必要である。

粒状体の応力～ひずみ関係を求めるためには、粒状体になされた仕事量を既知量とする必要がある。図-1 は、圧縮・せん断過程でなされる仕事量と応力との関係を示している。この関係を定式化するためには、少なくとも1つの供試体による圧縮・せん断試験をおこない、パラメータを決定することが必要である。

粒子の不連続な運動については、せん断過程では接点角の消滅（落込み）を評価するため、 C 、 S 、 W_0 の3つのパラメータを用い関係があることを明らかにしている³⁾。ここに R_i は全粒子接点数に対する粒子の消滅する割合である。 R_i は応力増分によって異なるため R_i を何らかの形で正規化、たとえば ΔW で割ることが必要であろう。また、発生（割り込み）を評価するために k_{21} 、 k_{22} 、 k_{31} 、 k_{32} の4つのパラメータを用い、応力比と線形関係にあることを明らかにしている³⁾。圧縮過程では、消滅を評価するために C_1 、 S_1 、 W_{01} 、 C_3 、 S_3 、 W_{03} の6つのパラメータを用い関係があることを明らかにしている。また、この他に接点角の変化量を規定する k^3 が必要である。以上、せん断過程では14個、圧縮過程では12個のパラメータが必要である。しかし、通常の三軸試験のように、供試体の粒子構造が水平方向に一様であり、応力状態が軸対称である場合のせん断過程では、 $k_{21}=k_{31}$ 、 $k_{22}=k_{32}$ 、弾性係数 $E_{M2}=E_{M3}$ となり、パラメータの数は11個になる。これらのパラメータを簡単な土質試験から求める手順を明らかにすることが今後の検討事項である。

4.おわりに

本報告は、北村が提案したマルコフ・モデルにおけるパラメータについて考察を行った。粒状体の応力～ひずみ関係を求めるためには、仕事量を既知量とするために、少なくとも1つの供試体による圧縮・せん断試験をおこなわなければならない。

【参考文献】1)北村良介：マルコフ過程を用いた粒状体の力学モデル,科研費報告書（課題番号：60550355）,1987.3 2)志方宏敏：圧密現象に関する基礎的研究,1999.3. 鹿児島大学大学院修士論文 3)新地正志：地盤材料の力学特性に関する基礎的研究,1987.3. 鹿児島大学大学院修士論文

表-1 マルコフ・モデルに用いている物理量

$X_{\beta,1}$	接点角 β でのポテンシャル障壁の最小値
$X_{\beta,2}$	接点角 β でのポテンシャル障壁の最大値
N_c	粒状体の全接点数
$N_{c,1}$	接点角 β でのポテンシャル障壁の最小値を越える接点数
n_β	接点角 β を有する接点数
$n_{\beta,1}$	n_β のうちポテンシャル障壁 $X_{\beta,1}$ を越える接点数
$n_{\beta,2}$	n_β のうちポテンシャル障壁 $X_{\beta,2}$ を越える接点数
$n_{\beta,0}$	ポテンシャル障壁を越えることが出来ない接点数
R_β	接点角が β であり、ポテンシャル障壁を越えることが出来ない接点がどの程度までポテンシャルの山を登ることができるかを表す係数
$R_{p,\beta}$	$X_{\beta,1}/X_{\beta,2}$
$R_{n,\beta}$	$n_{\beta,1}/n_{\beta,2}$
φ_{m0}	SMPの法線が規準座標軸となす角
W	外作用により粒状体になされた仕事量
ΔWe	粒状体になされた仕事の内、可逆な運動に寄与した仕事
δ_β	接点角変化量
$\overline{\delta_{\beta,k}}, \overline{\delta_{\beta,k}^2}$	ポテンシャル障壁 $X_{\beta,k}$ を越える接点における接点角の変化量の平均と二乗平均
$\overline{\delta_{\beta 0}}, \overline{\delta_{\beta 0}^2}$	ポテンシャル障壁越えることの出来ない接点における接点角の変化量の平均と二乗平均
$f_\beta(\delta)$	接点角変化量の平均と二乗平均を与える関数
σ_m	平均有効応力主応力
$\varepsilon_{s,xi}$	粒状体におけるひずみ
$N_{s+\Delta s,xi} / N_{s,xi}$	落ち込み、割り込みを表すパラメータ
Pd_i	落ち込み、割り込みを表すパラメータ
R_i	落ち込み、割り込みを表すパラメータ

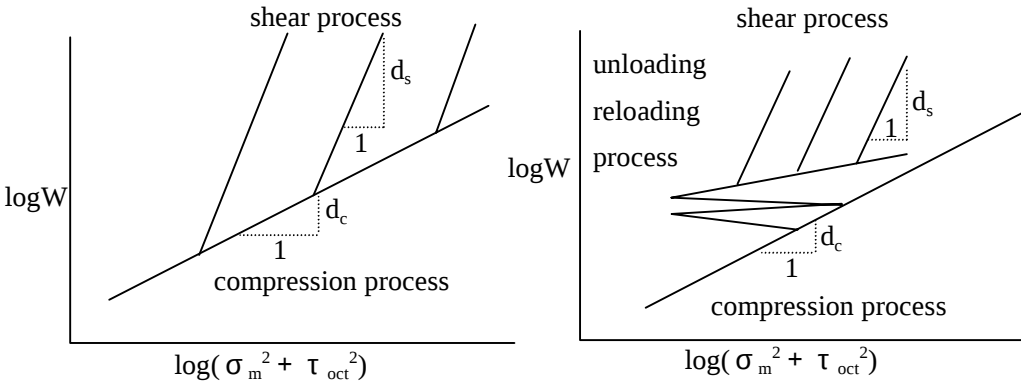


図-1 $\log_{10} W \sim \log_{10}(\sigma_m^2 + \tau_{oct}^2)$ 関係の模式図