

Helmholtz 表示要素に準ずる基礎変数表示要素の提案

IMI 計算工学研究室(理研研究嘱託) 今村 純也

1. はじめに

有限要素法の基底関数を Helmholtz 表示すれば、ベクトルポテンシャル要素は渦ありの非圧縮項を、スカラーポテンシャル要素は渦なしの圧縮項をそれぞれ分解表示できる。すなわち、前者はせん断変形を、後者は体積変化を表現する。これによる連続体解析上のメリットとして、

- 1) 非圧縮流の連続条件を完全に満足し、保存形表示と非保存形表示が数値解析上も一致する。
- 2) これは乱流解析の壁面近傍で重要。基礎変数表示要素は壁面で発散式の3項のうち2項はゼロで、1項はノンゼロ。よって、生産項に誤差を伴う。
- 3) ポテンシャル流の壁面すべり条件を表現できる。
- 4) 地震動のP波とS波をそれぞれ分離表現可能。
- 5) St.Venant の適合条件式を自動的に満足する。
- 6) 渦度の発散が自動的にゼロとなる。

などが指摘でき、固体・流体にも統一的に適用できる。

しかし、流速・変位が連続するためには、 C_1 連続な要素を必要とする。それゆえ一般には馴染みにくい面がある。また、ノード未知数がベクトルとなるため未知数自由度の肌目細かな配分(アダプティブ法)には多少難があるように思われる。

このため著者らは Helmholtz 表示要素の適用を進める¹⁾²⁾一方、基礎変数表示要素を用いて非圧縮条件を合理的に満足させるスキームも提案³⁾している。

Helmholtz 表示と基礎変数表示の優劣はまだ付け難いが、ここには後者の新しい要素を提案し、今後の比較検討材料として提出する。提案要素は従来の基礎変数表示要素と Helmholtz 表示要素の中間に位置する。

2. 方法

2.1 要素

非圧縮流体の例で示すが、圧縮流や固体力学にも拡張して適用することができる。

(1) 流速

流速 U_i の要素は、6面体矩形要素では i 方向にのみ2次式として中間ノードを配し、他の2方向には線形とする。4面体要素では完全2次式とする。そのうちの U_i の例を図-1に示す。

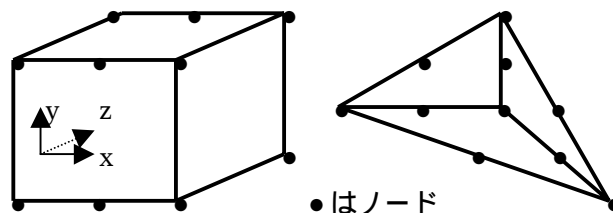


図-1 U_i の6面体および4面体要素

6面体と4面体要素が共存する系では、必要に応じて4面体要素の中間ノードを、要素境界を接する6面体要素の次数に合わせて消去する。

(2) 圧力勾配

$q_i \equiv \frac{\partial P_i}{\partial x_i}$ と記すこととし、 q_i 要素は U_i 要素と同一の形状関数とする(6面体、4面体ともに)。

(3) 偽ポテンシャルおよび偽渦度要素

適用法は後述するが、偽スカラーポテンシャル φ^* 要素、偽渦度 ω_i^* 要素を考え、ともに6面体では双1次、4面体では完全1次要素とする。

2.2 基礎方程式

i 方向流速を U_i として連続の式を式(1)で、圧力を P とし、密度を基準化して、空間微分を F_i にまとめた運動方程式を式(2)で表す。 τ_{ij} はせん断力、 δ_{ij} はクロネッカーのデルタ。

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1) \quad \frac{\partial U_i}{\partial t} = F_i \quad (2)$$

$$\text{ただし、} F_i = -\frac{\partial(U_i U_j - \tau_{ij} + \delta_{ij} P)}{\partial x_j}$$

2.3 流速の求め方

時間ステップ n 断面で、式(2)の右边を既知とし、最小 2 乗法 (以下 MV 法) で加速度を求める。その際、右辺の発散ゼロを弱解として保証するため、式(3)のように偽ポテンシャル項を加える。偽ポテンシャル項の加え方 (ϕ^* の求め方) は後述のように 2 通りある。

$$\int_{\Omega} \delta \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} - F_i + \frac{\partial \phi^*}{\partial x_i} \right)_n^2 d\Omega = 0, \quad \frac{\partial U_i}{\partial t} = 0 \text{ on wall} \quad (3)$$

2.4 偽ポテンシャル値の求め方

(1) 既報³⁾のように、まず偽ポテンシャル項を無視して加速度を求め、時間ステップを進めて $n+1$ 断面の流速に含まれる偽ポテンシャル量を式(4)の MV 法で掬い上げ、式(5)で ΔU_i を求め控除する。

$$\int_{\Omega} \delta \left(\frac{\partial \phi^*}{\partial x_i} + \frac{\partial U_i}{\partial t} \right)_{n+1-0}^2 d\Omega = 0, \quad \phi^* : \text{free on wall} \quad (4)$$

$$\int_{\Omega} \delta \left(\frac{\partial \phi^*}{\partial x_i} + \Delta \frac{\partial U_i}{\partial t} \right)_{n+1+0}^2 d\Omega = 0, \quad \frac{\partial U_i}{\partial t} = 0 \text{ on wall} \quad (5)$$

(2) ここでは新しい方法として、式(6)で偽ポテンシャルを求め、式(3)に適用する、ことを提案する。

$$\int_{\Omega} \delta \left(\frac{\partial \phi^*}{\partial x_i} - F_i \right)_n^2 d\Omega = 0, \quad \phi^* : \text{free on wall} \quad (6)$$

式(6)の連立方程式構築に際し、偽ポテンシャル項を無視した式(3)の連立方程式を同時に構築しておき、まず式(6)を解いて、その結果を式(3)の連立方程式右辺に加えれば、ほぼ 2 ステップで済む。

2.5 圧力勾配の求め方

式(3)は運動エネルギー式に相当するから圧力項は消滅 (発散定理適用) し、以上のスキームは圧力に無関係に進めることができる。したがって、所望する任意の時間ステップで圧力勾配を求めればよい。方法は圧力を未知、流速を既知とする式(2)の残差分散の最小化 (MV 法) による。発散定理を適用すれば加速度項は消滅し、式(7)から圧力のポisson方程式を得る。よって、元の最小 2 乗式から加速度項を除き、かつ式(8)を境界条件とし q_i を求める。

$$\int_{\Omega} \delta P \cdot \left(-\frac{\partial F_i}{\partial x_i} \right)_n d\Omega + \int_{\Gamma} \delta P \cdot F_{n\Gamma} d\Gamma = 0 \quad (7)$$

($n\Gamma$: 境界垂直方向)

$$F_{n\Gamma} = 0 \text{ on } \Gamma \quad (8)$$

その際、 q_i の回転ゼロを弱解として保証するため、式(9)で偽渦度を ω_i^* で掬い上げ、式(10)で Δq_i を求めて補正する。

$$\int_{\Omega} \delta \left(\underline{\underline{\omega_{i-1}^*}} - \frac{\partial q_i}{\partial x_{i+1}} + \frac{\partial q_{i+1}}{\partial x_i} \right)_n^2 d\Omega = 0, \quad \omega_{i-1} : \text{free on } \Gamma \quad (9)$$

$$\int_{\Omega} \delta \left(\underline{\underline{\omega_{i-1}^*}} - \frac{\partial}{\partial x_{i+1}} \Delta q_i + \frac{\partial}{\partial x_i} \Delta q_{i+1} \right)_n^2 d\Omega = 0, \quad \Delta q_{n\Gamma} = 0 \text{ on } \Gamma \quad (10)$$

ただし、($i=1,2,3$)($i+1=2,3,1$)($i-1=3,2,1$)

3. 考察

流速要素で i 方向の次数を 2 次とすることで、連続式の各項は双 1 次 (4 面体では完全 1 次) となり合理的である。例えば式(3)を解くに当たり、 F_i に含まれる流速勾配には要素内の連続式誤差を補正した平均値を適用できる。 U_i の例で示せば、式(11)のように適用する。

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_1} \leftarrow \frac{\partial U_1}{\partial x_1} - \frac{R}{3} \quad \text{ただし、} R = \frac{\partial U_i}{\partial x_i} \quad (11)$$

このように保存形と非保存形の数値誤差を少なくすることで、既報のエネルギー保存スキームが適用可能となる。

偽ポテンシャルの数値は、従来の流速修正法という圧力に相当する。したがって、提案のスキームによって正しい圧力勾配が求まるようになる。

また、提案モデルでは、壁面で連続条件を完全に満足させる (中間ノードを消去して) ことができる。

4. まとめ

基礎変数表示の取り扱いの容易さを具備しながら、準 Helmholtz 表示要素とも呼ぶべき要素を提案した。

圧力勾配要素の適用で正しい解析が可能なことも特徴である。数値計算例については講演時に示す。

参考文献

- 1) 今村・棚橋、Helmholtz 分解表示要素を用いた非圧縮流外挿解のエネルギー保存スキーム、第 14 回数値流体力学シンポジウム、E07-2, 2000.
- 2) 今村・棚橋、指数関数要素を用いる圧縮性自然対流のエネルギー保存スキーム、第 14 回数値流体力学シンポジウム、E05-3, 2000.
- 3) 今村・棚橋、基礎変数表示の流れから偽ポテンシャル成分を控除する方法による非圧縮流体の数値解法、計算工学講演会論文集、Vol.5, No.1, pp.159-160, 2000.