流束差分離法に基づく有限体積数値モデルの堰を越える流れへの適用性について

九州工業大学大学院　学生会員　○重枝　未玲
九州工業大学工学部　正会員　秋山 壽一郎

1.　はじめに

一般に浅水流方程式に基づく平面 2 次元数値モデルは河道内の流れや洪水氾濫流の流況をかなりの精度で再現することができ，計算効率を勘案すると，有効な計算手法の一つである．著者らは，有限体積法と流束差分離法に基づく平面 2 次元数値モデルを構築し，これまで漸拡・漸縮水路や物体群がある場への適用性について検討を加えてきた[1),2)]．本研究は，河川構造物の中でも代表的な台形堰を取り上げ，堰周辺の流れへの本数値モデルの再現性と適用限界について検討を行なったものである．

2.　基礎方程式

基礎方程式は式 (1) の 2 次元浅水流方程式である．ここに，$\boldsymbol{\mathcal{F}} = (\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$; $\boldsymbol{U} = (h, uh, vh)^T$; $\boldsymbol{E} = (uh, u^2h + \frac{1}{2}gh^2, uvh)^T$; $\boldsymbol{F} = (vh, uvh, v^2h + \frac{1}{2}gh^2)^T$; $\boldsymbol{S} = (0, -gh\,(S_{ox} - S_{fx})\,, -gh\,(S_{oy} - S_{fy}))^T$，$h$ は水深，u と v はそれぞれ x と y 方向の流速，g は重力加速度，S_{ox} と S_{oy} はそれぞれ x と y 方向の河床勾配である．S_{fx} と S_{fy} はそれぞれ x と y 方向の摩擦勾配であり，Manning の式で評価される．

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{F}} + \boldsymbol{S} = \boldsymbol{0} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{U}_i^{t+1} = \boldsymbol{U}_i^t - \frac{\Delta t}{S_i}\left(\sum_{l=1}^{N_e}\left(L_{il}(\boldsymbol{F}_{il}^* \cdot \boldsymbol{n}_{il})\right) + \sum_{l=1}^{N_e}\boldsymbol{S}_{il}^{*-}\right) \tag{2}$$

$$\boldsymbol{F}_{il}^* \cdot \boldsymbol{n}_{il} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\mathcal{F}}_i + \boldsymbol{\mathcal{F}}_l)\cdot \boldsymbol{n}_{il} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}(\tilde{\alpha}^j\,\Psi(\tilde{\lambda}^j)\,\tilde{\boldsymbol{e}}^j)_{il}$$

$$\boldsymbol{S}_{il}^* = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\left((\tilde{\beta}^j\,\tilde{\boldsymbol{e}}^j)_{il} - (\tilde{\beta}^j\,\frac{\Psi(\tilde{\lambda}^j)}{\tilde{\lambda}^j}\,\tilde{\boldsymbol{e}}^j)_{il}\right) \tag{3}$$

$$\tilde{u} = \frac{\sqrt{h_i}u_i + \sqrt{h_l}u_l}{\sqrt{h_i} + \sqrt{h_l}}\;;\; \tilde{v} = \frac{\sqrt{h_i}v_i + \sqrt{h_l}v_l}{\sqrt{h_i} + \sqrt{h_l}}\;;\; \tilde{c} = \sqrt{g\frac{h_i + h_l}{2}} \tag{4}$$

$$\Psi(\tilde{\lambda}^j) = \begin{cases} |\tilde{\lambda}^j| & \text{if}\,|\tilde{\lambda}^j| \geq \frac{1}{2}\delta^j \\ \frac{(\tilde{\lambda}^j)^2}{\delta^j} + \frac{1}{4}\delta^j & \text{if}\,|\tilde{\lambda}^j| < \frac{1}{2}\delta^j \end{cases} \quad \delta^j = \max(0, 4\Delta\lambda^j) \tag{5}$$

3.　数値モデル

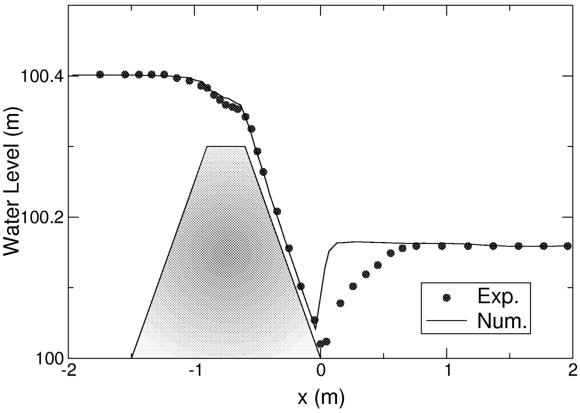
流束差分離法と有限体積法に基づく平面 2 次元数値モデルを式 (2) に示す．ここに，t は時間ステップ，i はセル番号，l は隣接する局所的セル番号，N_e はセルの接点数 (3 角形の場合 Ne=3) である．また，Δt は時間の刻み幅，S_i はセル面積，L_{il} はセル境界線の長さ，$\boldsymbol{n}_{il}$ はセル境界における外向き法線ベクトルである．式 (2) の $\boldsymbol{F}_{il}^* \cdot \boldsymbol{n}_{il}$ と $\boldsymbol{S}_{il}^*$ は数値流束と数値発生・消滅項であり，それぞれ式 (3) で表される．ここに，λ，$\boldsymbol{e}$ はそれぞれ流束ヤコビアン行列 ($\boldsymbol{A} = \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{F}}\cdot\boldsymbol{n}}{\partial \boldsymbol{U}}$) の固有値と左固有ベクトルである．$\alpha$ は各波を横切った際の物理量の跳躍量である．β は発生・消滅項に対応する物理量の跳躍量である．式 (3) 中の $\tilde{\ }$ は, 式 (4) で表される Roe の平均を行った物理量により評価されていることを表わす．また，式 (3) の $\Delta(\cdot)$ は $\Delta(\cdot) = (\cdot)_i - (\cdot)_l$ を表す．$\Psi(\tilde{\lambda}^j)$ はエントロピー補正量であり，式 (5) で表される．安定条件は，$\Delta t \leq \frac{C_r \min(dr_{il})}{2\cdot\max(c + \sqrt{u^2+v^2})}$ である．ここに，C_r はクーラン数，dr_{il} はセル重心間の距離である．

4.　計算結果

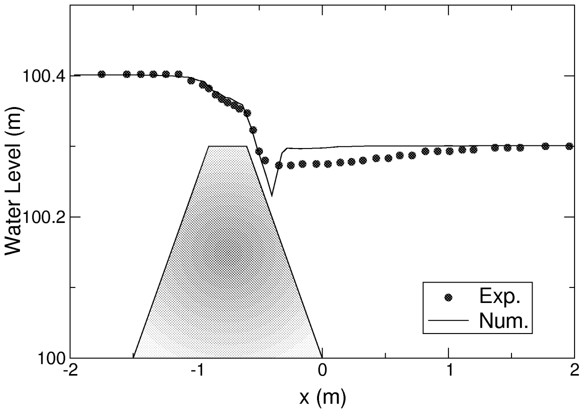
本数値モデルの Fritz et al.[3)]による堰を越える流れの実験結果に対する適用性について調べる．実験に用いられた水路は，高さ 0.3m，長さ 1.5m の堰が設置された幅 0.499m，長さ 7m の長方形水平水路である．堰天端には長さ 0.3m の水平部があり，堰の法面勾配は前後面ともに 1:2 である．水路上流端の流量を一定とし，下流端の水深を変化させることで，流れの状態を完全越流状態からもぐり堰状態に変化させ，完全越流状態 (Case1), 不完全越流状態 (Case2，Case3) およびもぐり堰状態 (Case4) の 4 通りの実験を行なっている．また，不完全越流状態は，流れに表面渦を伴い堰の法面に沿った主流速が現れる Case2， 流れに底面渦を伴い水表面に沿った主流速が現れる Case3 とに分けられている．

計算では対象とする計算領域を 456 個のセルで分割し，境界条件として水路上流端には流量を下流端には水深を与えた．計算に用いたマニングの粗度係数およびクーラン数の値は，それぞれ n =0.01 および $C_r = 0.95$

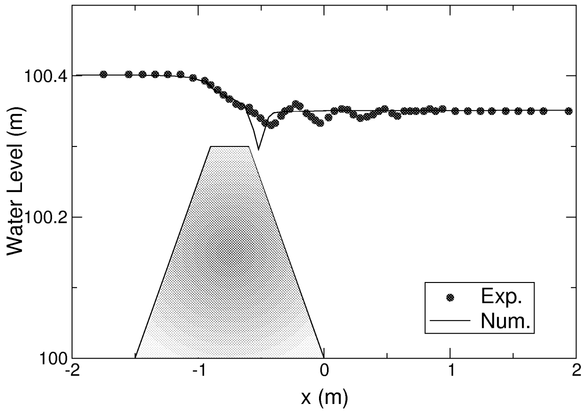
キーワード: 数値計算，流束差分離法，有限体積数値モデル，堰
連絡先: 〒 804-8550 北九州市戸畑区仙水町 1-1 九州工業大学工学部 建設社会工学科・093-884-3117・093-884-3100



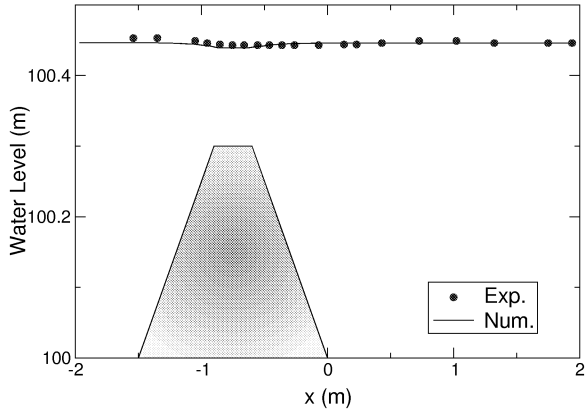
図–1 Case1 の水面形状の計算値と実験値との比較



図–2 Case2 の水面形状の計算値と実験値との比較



図–3 Case3 の水面形状の計算値と実験値との比較



図–4 Case4 の水面形状の計算値と実験値との比較

である．

図–1 から**図–4** に水面形状の計算値と実験値との比較を示す．これらの図から，いずれの Case においても堰上下流側で，計算値は実験値をほぼ再現していることが確認できる．また，Case1〜Case3 では下流端水深が増しても，上流側の水深が変化しないことや，Case4 では下流端水深の上昇が上流側水深の上昇をもたらしていることなど，計算値の再現性を確認することができる．

完全越流状態である**図–1** では計算値は，跳水の高さや発生位置は再現できているものの，その長さは再現できていない．不完全越流状態である**図–2** と**図–3** では堰下流側や法面勾配付近で計算値と実験値との間にずれが認められる．これは，表面渦を伴った底面に潜り込む流れや，底面渦を伴った水表面に沿った流れを平面 2 次元数値モデルでは再現できないためである．しかしながら，そのような局所的な流れの影響が小さくなる下流端では実験値をほぼ再現している．また，もぐり堰状態となる**図–4** では計算値は実験値をほぼ再現している．これらのことから，本平面 2 次元数値モデルは堰上流側と堰下流端から堰頂天端長の約 5 倍程度下流以降での水面形状を良好に再現できることがわかる．

5.　おわりに

流束差分離法と有限体積法に基づく平面 2 次元数値モデルの堰を越える流れへの適用性について検討を行なった．その結果，完全越流状態，不完全越流状態およびもぐり堰状態のいずれの状態でも，本数値モデルは堰上流側と堰下流端から堰天端長の約 5 倍下流以降での水面形状を再現できることがわかった．ただし，これは堰形状によって変化すると考えられるので，今後の検討が必要であるが，堤防や構造物を越流する流れを本平面 2 次元モデルによりある一定の精度で再現できることが分かった．

参考文献

1) 重枝未玲，秋山壽一郎：平成 12 年度土木学会西武支部公演概要集, 2001.
2) 重枝未玲，秋山壽一郎，浦 勝，有田由高：水工学論文集，第 45 巻，2001.
3) Fritz, H. M. et al.: Journal of Hydraulic Engineering, Vol.124, No.9, 1998.