

急縮部における流れの遷移の数値解析

日本建設コンサルタント(株) 正会員 ○西本直史
北海道大学工学研究科 正会員 森 明巨

1. はじめに

急縮部における流れの遷移について、遷移限界を定める理論解析の結果(フルード数 Fr と川幅の関係)は実験とよく一致することが報告されている¹⁾。そこで本論文では、この遷移限界および跳水の発生について、常射流混在流の解析に有効な FDS 法²⁾を用いた数値解析による検討を行った。

2. 数値解析法の概要

基礎方程式は次のとおりである。

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial(h+\eta)}{\partial x} + gAI_f &= \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + gh \left(\frac{\partial A}{\partial x} - h \frac{\partial b}{\partial x} \right) + ghb \frac{\partial \eta}{\partial x} + gAI_f \\ &= \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} + gh\tilde{h}A \right) - gh\tilde{h} \frac{\partial b}{\partial x} + ghb \frac{\partial \eta}{\partial x} + gAI_f = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

ここに、 Q は流量、 h は水深、 b は川幅、 A は流積 ($A = bh$)、 η は河床位、 g は重力加速度である。 I_f は摩擦勾配で、マンニングの粗度 n を用いると $I_f = n^2 Q^2 / A^2 h^{4/3}$ となる。 $\tilde{h}$ は局所的な(離散化式では計算点間の)平均水深である。基礎方程式を保存形で示すと式(3)となる。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \Omega = 0 \quad \text{ただし} \quad \phi = \begin{pmatrix} A \\ Q \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} Q \\ \frac{Q^2}{A} + gh\tilde{h}A \end{pmatrix}, \quad \Omega = \begin{pmatrix} 0 \\ -gh\tilde{h} \frac{\partial b}{\partial x} + ghb \frac{\partial \eta}{\partial x} + fQ \end{pmatrix} \quad (3)$$

ここに、 $f = gn^2 Q / bh^{7/3} = gn^2 Q b^{4/3} / A^{7/3}$ である。基礎方程式の移流形は式(4)である。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + J \frac{\partial \phi}{\partial x} + \Omega = 0 \quad \text{ただし} \quad J = \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c^2 - v^2 & 2v \end{pmatrix} \quad (4)$$

ここに、 c は長波の伝播速度で $c = \sqrt{gh}$ 、 $v = Q/A$ である。 J の固有値(特性速度)である Λ は式(5)となる。

$$\Lambda_+ = v + c, \quad \Lambda_- = v - c \quad (5)$$

解析の詳細は文献 2)と同様であり、側壁の圧力($-gh\tilde{h} \partial b / \partial x$)についても特性波の方向に配分する。

3. 急縮流れの数値計算

文献 1)の実験と同様に、図-1 に示す急縮部の形状を対象として計算を行った。上流端には $0.01 \text{ m}^3/\text{s}$ の一定流量を与え、上流端が射流の場合にはさらに $\partial A / \partial t = 0$ の条件を与えた。また、下流端が常流の場合に下流端水位(=初期水位)を与えた。初期条件として、与条件 Fr から得られる水位、流速を与えた(全区間で水位、流速、 Fr は一定とした)。水路長は 6 m (急縮部 $x = 2.9 \sim 3.1 \text{ m}$)、計算格子は $\Delta x = 0.02 \text{ m}$ 、 $\Delta t = 0.005 \text{ sec}$ である。

山田ら¹⁾は、ベルヌーイ式と連続式を用いて急縮部における $\varepsilon = 2S/B_0$ と上流側 Fr の関係を調べた結果、図-2 の限界線(実線)の左側に解の存在範囲があることを示し、右側には解がなく跳水が発生するとした。そこで本検討では、全区間で常流または射流となる遷移限界値を計算により求め、この理論値との比較を行った。図中の○は、本計算で定常に達したときの限界値で、理論値に

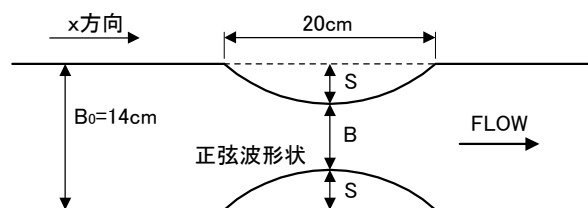


図-1 急縮部の形状

Key Words : numerical computation , abrupt contraction , transition of flow , hydraulic jump , flux difference splitting

連絡先：〒105-0004 東京都港区新橋 6-17-19, Tel.03-5405-8151, FAX.03-5405-8161

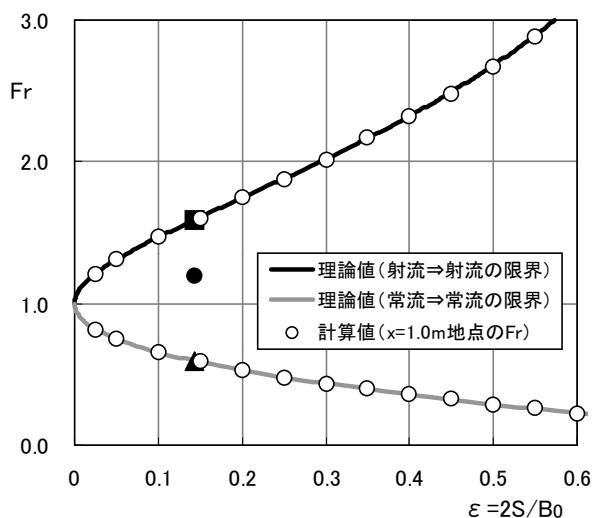
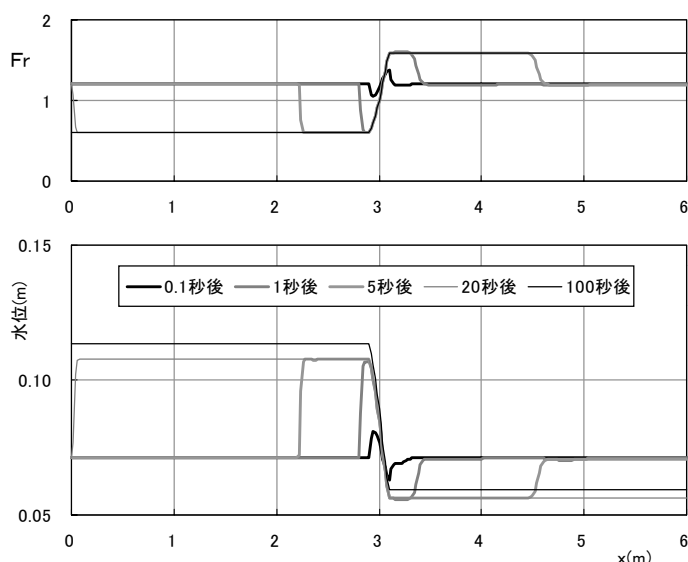
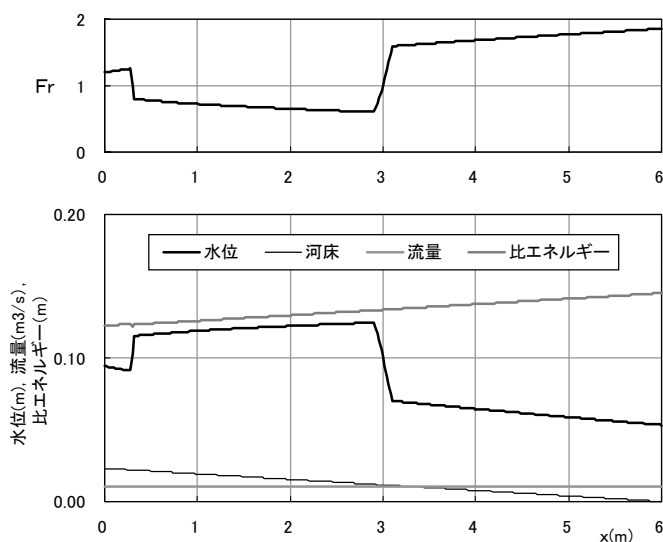
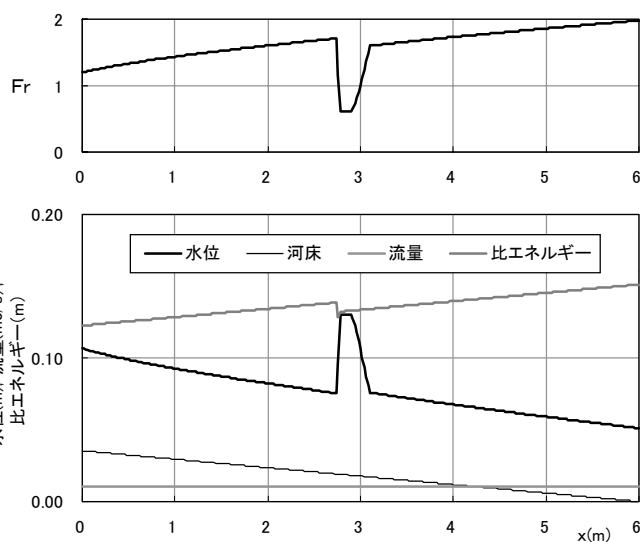
図-2 Fr- ε の関係図

図-3 水位, Fr縦断面図

図-4 水位, 流量, 比エネルギー, Fr縦断面図 ($I_b=1/260$)図-5 水位, 流量, 比エネルギー, Fr縦断面図 ($I_b=1/170$)

良く一致しているのが分る．なお，計算河床は水平 (0m) で，粗度は 0 である．

図-2 の●のように，解の非存在域の値 ($Fr=1.2$, $\varepsilon=0.143$) を初期条件として計算すると，図-3 のように計算開始後に急縮部上流の水位が上昇して跳水が現れ，急縮部で支配断面が現れる (1 秒後)．その後，跳水は上流に移動し (5, 20 秒後)，最終的に上下流の Fr は遷移限界線上 (図-2 の▲, ■) に移行する．なお，急縮部における初期条件を極端に変えても，全区間に粗度 ($n=0.01$) を与えても結果は同様である．

そこで，この計算で河床勾配 I_b を与えると， I_b が概ね $1/260$ (図-4) ~ $1/170$ (図-5) の範囲で跳水が安定して存在する結果を得た．このとき上流側 Fr ($x=1.0m$) はそれぞれ 0.73, 1.44 であり，両者はともに図-2 に示す解の非存在域にある．ちなみに，跳水部におけるエネルギー損失は理論値とほぼ等しい．また，河床勾配を $1/400$ として流量を変化させる計算を行うと 概ね $0.003 \sim 0.005 m^3/s$ の範囲で跳水が安定して存在し，同様に上流側 Fr が解の非存在域にある結果を得た．

4. おわりに

本数値解析により，急縮による流れの遷移限界および跳水の発生を適切に表し得ることを示した．

参考文献

- 1) 水子，竹本，山田：断面形状の変化に伴う水面形遷移に関する研究，土木学会第43回年講，pp.480-481，1988.
- 2) 西本，森，板倉，金澤：FDS法による1次元開水路流れの数値解析，土木学会論文集，No.670，pp.25-36，2001.