非定常流における交互砂州の安定解析

独立行政法人北海道開発土木研究所　正会員　渡邊康玄
University of Trent, Italy　Marco Tubino and Guido Zolezzi

1. はじめに： 河床に形成される交互砂州は、水衝部や局所的な深掘れを形成させ、河道災害の発生と密接に関係している。また、交互砂州の形成は河床の撹乱を意味し、その特性把握は、防災・河川環境の両面から重要な項目となっている。従来から交互砂州の形成に関して研究が行われ、交互砂州の特性等がかなり明らかになってきている。しかし、これらの研究の多くは定常流下での砂州の挙動の把握であり、時間的に流れの変化する洪水時の挙動に関する研究は、あまり行われてこなかった[1),2)]。本研究は、非定常流下の砂州の挙動を把握するための第一歩として、流砂については掃流砂のみを扱うこととし、安定線形解析を実施した結果を報告するものである。

2. 線形解析： 川幅 $2B^*$ の直線水路における拡散項を省略した非定常２次元浅水流式と連続の式および掃流砂を対象とした流砂連続式を、$(U,V)=(U^*,V^*)/\overline{U}_0^*$、$D=D^*/\overline{D}_0^*$、$H=H^*/(\overline{F}_0^2\overline{D}_0^*)$、$(x,y)=(x^*,y^*)/B^*$、$(\tau,t)=t^*/(1/\sigma^*,B^*/\overline{U}_0^*)$、$(Q_{sx},Q_{sy})=(Q_{sx}^*,Q_{sy}^*)/(\Delta g^* d_s^{*3})^{1/2}$、$(\tau_x,\tau_y)=(\tau_x^*,\tau_y^*)/\rho^*\overline{U}_0^{*2}$ で無次元化すると、(1)～(4)式となる。

$$\sigma\frac{\partial U}{\partial \tau}+U\frac{\partial U}{\partial x}+V\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial H}{\partial x}+\overline{\beta}_0\frac{\tau_x}{D}=0 \qquad (1)$$

$$\sigma\frac{\partial V}{\partial \tau}+U\frac{\partial V}{\partial x}+V\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial H}{\partial y}+\overline{\beta}_0\frac{\tau_y}{D}=0 \qquad (2)$$

$$\sigma\frac{\partial D}{\partial \tau}+\frac{\partial (UD)}{\partial x}+\frac{\partial (VD)}{\partial y}=0 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial(\overline{F}_0^2H-D)}{\partial t}+\overline{Q}_0\left(\frac{\partial Q_{bx}}{\partial x}+\frac{\partial Q_{by}}{\partial y}\right)=0 \qquad (4)$$

ここで、t^*；時間、x^*,y^*；縦横断方向座標軸、U^*,V^*；x^*,y^* 軸方向の流速、H^*；水位、D^*；水深、η^*；河床高（$=H^*-D^*$）、τ_x^*,τ_y^*；x^*,y^* 軸方向の剪断力、Q_{bx}^*,Q_{by}^*；x^*,y^* 軸方向の掃流砂量、ρ^*；水の密度、g^*；重力加速度、$1/\sigma^*$；洪水の継続時間である。また、$\overline{F}_0=\overline{U}_0^*/(g^*\overline{D}_0^*)^{1/2}$、$\overline{\beta}_0=B^*/\overline{D}_0^*$、$\sigma=\sigma^*B^*/\overline{U}_0^*$、$\overline{Q}_0=(\Delta g^* d_s^{*3})^{1/2}/[(1-P)\overline{U}_0^*\overline{D}_0^*]$、$\Delta=(\rho_s^*-\rho^*)/\rho^*$ であり、ρ_s^*,P,d_s^*；河床材料の単位堆積重量・空隙率・粒径、$\overline{U}_0^*,\overline{H}_0^*,\overline{D}_0^*$；基底流の流速・水位・水深である。なお、* の付いた記号は有次元量を示し、付いていないものは無次元量を表している。

U,V,H,D について、洪水波形によって決定されるものと、河床の変化に伴う摂動量に分け、$U=U_0+\varepsilon U_1$、$V=\varepsilon V_1$、$H=H_0+\varepsilon H_1$、$D=D_0+\varepsilon D_1$ として表現する。U_0,V_0,H_0,D_0 は、時間 t のみの関数であり、x,y については一定値である。さらに、$\vartheta,\phi,\tau_x,\tau_y$ を、$\vartheta=\vartheta_0+\varepsilon\vartheta_0\vartheta_1$、$\phi=\phi_0+\varepsilon\phi_0\phi_1$、$\tau_x=\tau_{x0}+\varepsilon\tau_{x1}$、$\tau_y=\varepsilon\tau_{y1}$ とする。ここで、ϑ；無次元掃流力、ϕ；掃流砂量、ε；摂動パラメータである。

今回検討する河床波の波長は一般に洪水波の波長に比べ十分小さい。このため、洪水時の砂州の挙動を検討する本研究では、定点では時間的に洪水波の挙動すなわち水位の上昇下降等の挙動を示すが、洪水波によって決定される水深や流速の変化は時間のみに依存し、水面勾配は時間的に変化しない状態を扱うこととする。

河床摩擦係数 $c_f\left(=U_*^{*2}/U^{*2},\ U_*^*;\text{摩擦速度}\right)$ は一般に無次元掃流力と水深の関数として表され、掃流砂量は無次元掃流力と水深との関数で表される場合が多いことから、それぞれ式（5）,(6)式のように摂動展開する。

$$c_f=f(\vartheta,D)=c_{f0}+\varepsilon c_{f0}(C_T\vartheta_1+C_DD_1) \qquad (5)$$

$$\phi=f(\vartheta,D)=\phi_0+\varepsilon\phi_0(\Phi_T\vartheta_1+\Phi_DD_1) \qquad (6)$$

$$C_T=\frac{\vartheta_0}{c_{f0}}\left.\frac{\partial c_f}{\partial\vartheta}\right|_{\vartheta=\vartheta_0},\qquad C_D=\frac{1}{c_{f0}}\left.\frac{\partial c_f}{\partial D}\right|_{D=D_0},$$

$$\Phi_T=\frac{\vartheta_0}{\phi_0}\left.\frac{\partial \phi}{\partial\vartheta}\right|_{\vartheta=\vartheta_0},\qquad \Phi_D=\frac{D_0}{\phi_0}\left.\frac{\partial \phi}{\partial D}\right|_{D=D_0}$$

次に、水路側壁において横断方向流速 0 となる条件を考慮し、U_1,V_1,H_1,D_1 について、交互砂州形成に伴う摂動量として、(7)式で表現する。

$$\{U_1,V_1,H_1,D_1\}=\{\hat{U}_1,\hat{V}_1,\hat{H}_1,\hat{D}_1\}\{S_1,C_1,S_1,S_1\}E_1+c.c. \qquad (7)$$

ここで、$S_1=\sin(\pi y/2)$, $C_1=\cos(\pi y/2)$, $E_1=\exp(i\lambda x)$ であり、i；虚数単位、$c.c.$；共役複素数、λ；縦断方向砂州波数（$\lambda=2\pi B^*/L^*$, L^*;砂州波長）である。

通常 $\sigma<<1$ であり慣性項を省略するとともに、$\hat{U}_1,\hat{V}_1,\hat{H}_1$ を $\hat{D}_1$ で表し整理すると(8)式が得られる。

$$\frac{\partial\hat{D}_1}{\partial t}+\mathbf{G}(\overline{d}_{s0},\overline{\beta}_0,\overline{\vartheta}_0,D_0,\lambda)\hat{D}_1=0 \qquad (8)$$

ここで、$\overline{\theta}_0$；基底流の無次元掃流力である。また $\mathbf{G}(\overline{d}_{s0},\overline{\beta}_0,\overline{\vartheta}_0,D_0,\lambda)$ は、(9)式で表される。

$$\mathbf{G}(\overline{d}_{s0},\overline{\beta}_0,\overline{\vartheta}_0,D_0,\lambda)=\frac{\overline{F}_0^2}{\overline{F}_0^2f_H-1}\frac{\partial f_H}{\partial t}+\frac{\overline{Q}_0\phi_0}{\overline{F}_0^2f_H-1}\left[\frac{i\lambda}{1-C_T}\left(\frac{2}{K}\Phi_Tf_UD_0^{-\frac{1}{2}}+C_D\Phi_T+\Phi_D(1-C_T)\right)-\frac{1}{2}\pi\left\{\frac{1}{K}f_VD_0^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\pi\frac{r}{\overline{\beta}_0\vartheta_0^{\frac{1}{2}}}(\overline{F}_0^2f_H-1)\right\}\right] \qquad (9)$$

$$f_U=-\frac{iK(-4ia_1\lambda^2+a_2\pi^2+a_3)}{(a_1a_4+ia_3)D_0^{\frac{1}{2}}},\qquad f_V=\frac{2K\pi\lambda(a_2+ia_1)}{(a_1a_4+ia_3)D_0^{\frac{1}{2}}},$$

キーワード：交互砂州、安定解析、非定常流、河床形状
連絡先：〒062-8602 札幌市豊平区平岸 1-3、TEL 011-841-5235 FAX 011-818-7036 e-mail y-watanb@ceri.go.jp

表－ 1　実験の諸元と交互砂州形状

Case	流量 cm^3/s	水深 cm	時間 min.	砂州波長 m	砂州波高 cm
S-1	750	1.02	300	3.4	3.4
S-2	1320	1.49	255	3.1	2.1
S-3	1990	1.95	225	2.0	2.5
S-4	2500	2.32	285	2.1	2.5
S-5	3070	2.66	210	-	-
S-6	3470	2.92	210	-	-
U-1	1330	1.50	19		0.8
U-2	2030	1.92	38	1.0	0.9
U-3	2910	2.46	62	2.0	1.3
U-4	3840	2.90	120	2.0	1.8
U-5	2890	2.50	206	2.4	1.7
U-6	2070	1.85	269	2.2	1.7
U-7	1330	1.38	350	2.0	2.3
U-8	750	0.94	480	3.1	3.4

$$f_H = -\frac{4K^2\lambda\left(\bar{\beta}_0 c_{f0} + i\lambda D_0\right)\left(a_2 + ia_1\right)}{\left(a_1a_4 + ia_3\right)D_0} \quad , \quad K = \left(\frac{\bar{\theta}_0 \Delta d_s}{C_{f0}\bar{F}_0^2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad ,$$

$$a_1 = \left(C_T - 1\right)\lambda D_0 \quad , \quad a_2 = \bar{\beta}_0 c_{f0}\left(-3 + C_T + C_D D_0\right) \quad ,$$

$$a_3 = 2\bar{\beta}_0 c_{f0}\left\{\pi^2 - 2\left(C_T - 1\right)\lambda^2\right\}, \quad a_4 = \pi^2 + 4\lambda^2$$

(8)式の解は、$\mathbf{G}\left(\bar{d}_{s0}, \bar{\beta}_0, \bar{\vartheta}_0, D_0, \lambda\right)$が t に独立である場合、すなわち流れが定常状態の場合には、(10)式となり、基本的に従来と同様の結果 3)を示す。しかし流れを不定流としているため D_0 が時間の関数であり、$\mathbf{G}\left(\bar{d}_{s0}, \bar{\beta}_0, \bar{\vartheta}_0, D_0, \lambda\right)$ は t の関数となる。したがって解は(11)式となる。

$$\hat{D}_1 = \exp\left[-\mathbf{G}t\right]\mathrm{const.} \quad (10) \qquad \hat{D}_1 = \exp\left[-\int_{t_0}^{t}\mathbf{G}dt'\right]\mathrm{const.} \quad (11)$$

(10),(11)式の指数部は、摂動量が時間的にどのように変化していくかを表すものであり、言い換えれば、交互砂州の時間に関する増幅率Ω（定常流：$\Omega_S = -\mathbf{G}$、非定常流 $\Omega_U = -\int_{t_0}^{t}\mathbf{G}dt'$）である。増幅率が正の値のとき交互砂州は発達し、負の値のときは減衰する。

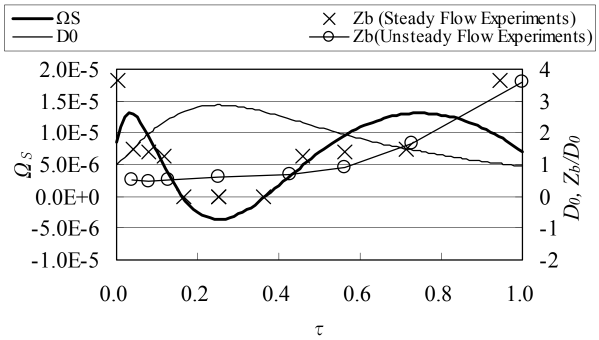
(5),(6)式に具体的な関数形を与え、$\bar{d}_{s0}, \bar{\beta}_0, \bar{\vartheta}_0$ および洪水波形である D_0 を入力することにより、任意の波数λの交互砂州についての増幅率が求まる。線形解析においては、各増幅率の中で最大の値Ω_mを示した波数λ_mの河床波が形成されることになる。

3.　**実験結果との比較**：安定解析の妥当性を検証するため、長さ 50m,幅 30cm,勾配 1/180 の実験水路における定常流および非定常流の砂州発生実験結果との比較を行う。実験条件および測定された砂州形状等を表-1 に示す。また、非定常実験は、通水途中で砂州形状の測定のため通水を停止することから、その都度河床を整形し非定常流を最初から通水することにより流れの非定常性を確保した。なお、河床材料は粒径 0.76mm の均一な硅砂である。

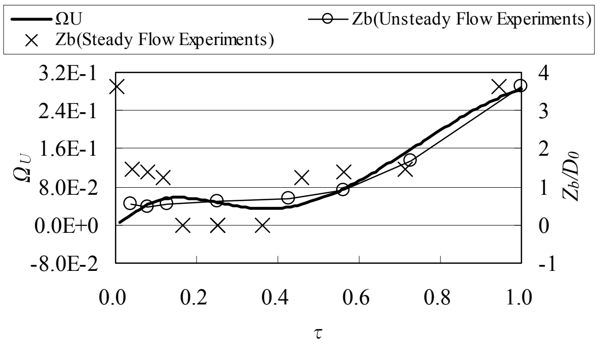
定常実験により得られた c_f の関数形および、非定常流実験に用いた水深の波形は、(12),(13)式である。

$$C_f = 0.0113\vartheta_0^{0.069} \quad (12) \qquad D_0 = \left[\frac{1.03\left(\tau + 0.522\right)^2}{\tau^2 + 0.131} - 1.15\right]^{\frac{3}{2}} \quad (13)$$

また、掃流砂量式は(14)式の Van Rijn4)の式を用いた。



図－ 1　測定砂州波高と定常状態での増幅率



図－ 2　測定砂州波高と非定常状態での増幅率

$$\phi = 0.053\left(\frac{\theta_0' - \vartheta_c}{\vartheta_c}\right)^{2.1}\left(\frac{\nu^{*2}}{\Delta g^* d_s^{*3}}\right)^{0.1} \qquad (14)$$

ここで、$\vartheta_0', \vartheta_c$;無次元の有効掃流力・限界掃流力、ν^*；水の粘性係数である。

図-1 は、定常実験および非定常実験の砂州波高と定常状態におけるΩ_mの比較を示したものである。定常状態でのΩ_mは、定常流実験で非砂州となった水深で負の値を示しており、両者の結果は一致している。しかし、非定常流実験において水深が定常流実験の非砂州状態となる時間に砂州が発生しており、定常状態での解析は、非定常流実験の結果を表現できていない。一方、図-2 は実験結果と非定常状態とした場合のΩ_mとの対応をみたものであるが、定常流では砂州の発生が認められなかった水深における砂州の発生を表現することが可能となっており、両者の傾向は一致している。

4.　**おわりに**：非定常流における砂州の発生について線形安定解析を実施し、さらに理論の限界等をつめる必要があるが、今回の線形解析により洪水中の砂州の波高についてある程度表現が可能であることが示唆された。

参考文献

1) Tubino, M. : Growth of alternate bars in unsteady flow. *Water Resources Research, Vol. 27, No. 1,* 37-52,1991.

2)三輪浩ら ：正弦波状流量変化による交互砂州の発達・変形過程、*土木学会 55 回年講概要集第 2 部,* 540-541, 2000.

3)Colombini, M. *et al.* Finite-amplitude alternate bars, *J. Fluid Mech., 181,* 213-232, 1987.

4) Van Rijn, L. C.　Sediment transport, part I: bed load transport, *J. Hydraul. Eng., Vol. 110, No. 10, ASCE,* 1431-1456, 1984.