Magnetic Force（磁力）を受ける無限板中の円孔から発生したクラックの解析

名古屋工業大学　学生員　大松　紀夫
名古屋工業大学　正　員　長谷部宣男
名古屋工業大学　正　員　王　険峰

１．はじめに

Magnetic Force（磁力）を受ける無限板中の円孔から発生したクラックの解析をおこなう。円孔にクラックを有する無限板に磁場が作用する場合の外力境界値問題の解析をする。またクラック先端での応力拡大係数を求める。

２．写像関数

図１のような円孔にクラックを有する無限板（z平面）を考える。この解析形状を単位円外（ζ平面）に写像する有理写像関数 $\omega(\zeta)$ は次式で与えられる［1］。

$$z=\omega(\zeta)=\mathrm{E}_c+\mathrm{E}_0\zeta+\frac{\mathrm{E}_0}{2}\frac{1}{\zeta}+\sum_{\mathrm{K}=1}^{24}\frac{\mathrm{E_K}}{\zeta_\mathrm{K}-\zeta} \tag{1}$$

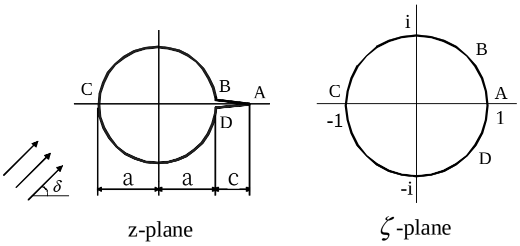

図1　解析形状と単位円

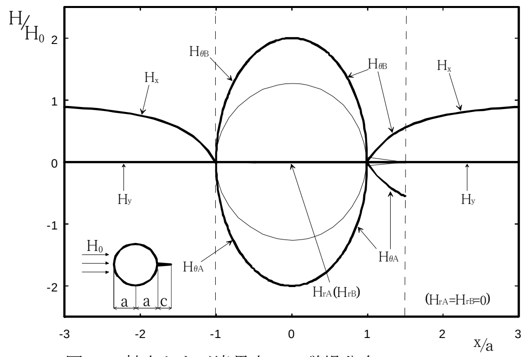

図2　X軸上および境界上での磁場分布　（δ=0°　c/a=0.5）

３．磁場解析・応力解析

磁場の強さは複素磁場関数 $A(\zeta)$ 、有理写像関数 $\omega(\zeta)$ を用いて次式で表され。

$$a(z)=\alpha(\zeta)=\mathrm{H}_x-i\mathrm{H}_y=-\frac{\mathrm{A}'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \tag{2}$$

境界条件は

$$-\left\{\mathrm{A}(\sigma)-\overline{\mathrm{A}(\sigma)}\right\}=2i\int\mathrm{H}_n ds+const \tag{3}$$

σは単位円上のζ、$\mathrm{H_n}$は境界上での法線方向の磁場の強さを表し、磁性体(孔を有する無限板 μ_{e1})と真空(孔の部分 μ_{e2})の透磁率は $\mu_{e1}\gg\mu_{e2}$ ［2］となり境界の連続条件より $\mathrm{H_n}=0$ とできる。求めたい複素磁場関数 $A(\zeta)$ を次式であたえる。

$$\mathrm{A}(\zeta)=\mathrm{A}_1(\zeta)+\mathrm{A}_2(\zeta)\qquad \mathrm{A}_2(\zeta)=-\mathrm{H}_0\omega(\zeta)e^{-i\delta} \tag{4}$$

$\mathrm{A}_1(\zeta)$ は孔周辺の磁場の乱れ、$\mathrm{A}_2(\zeta)$ は無限遠で方向δを有する一様な磁場の強さ H_0 を表す関数である。式(3)に式(4)を代入し、Cauchy 積分すると複素磁場関数 $\mathrm{A}(\zeta)$ は次式のように誘導される。

$$\mathrm{A}(\zeta)=-\mathrm{H}_0\left(\mathrm{E}_0\zeta e^{-i\delta}+\frac{\overline{\mathrm{E}_0}}{\zeta}e^{i\delta}+\mathrm{E}_c e^{-i\delta}\right)+\mathrm{A}_1(\infty) \tag{5}$$

よって、磁場の強さは次式となる

$$\mathrm{H}_x-i\mathrm{H}_y=-\frac{\mathrm{A}'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}=\frac{\mathrm{H}_0\left(\mathrm{E}_0e^{-i\delta}-\frac{\overline{\mathrm{E}_0}}{\zeta^2}e^{i\delta}\right)}{\omega'(\zeta)} \tag{6}$$

次に一様磁場に孔がある時の外力境界条件式は次式となる

$$\mathrm{X}-i\mathrm{Y}=i\left[\overline{\omega(\sigma)}\frac{\Phi'(\sigma)}{\omega'(\sigma)}+\overline{\Phi(\sigma)}+\Psi(\sigma)\right]+\frac{i}{2}\mu_e\int\alpha^2(\sigma)\cdot\omega'(\sigma)d\sigma \tag{7}$$

キーワード　電磁力、写像関数、外力境界値問題、応力拡大係数、磁場
連絡先　名古屋市昭和区御器所町　名古屋工業大学　社会開発工学科　Tel,052-735-5482

ここでμ_eは透磁率である。式(1), (2), (6)を用いて、式 (7)の積分を行い、式(7)の共役な式に$\dfrac{1}{2\pi i}\dfrac{d\sigma}{\sigma-\zeta}$ を乗じる。

一般性を失うことなく単位円上で外力 0 (X = Y = 0)の場合$\Phi(\zeta)$ は次式で求められる。

$$\Phi(\zeta)=-\sum_{\mathrm{K}=1}^{24}\frac{\mathrm{B_K}\overline{\mathrm{A_K}}}{\zeta_{\mathrm{K}}-\zeta}-\frac{\mu_e}{2}\mathrm{H}_0^2\overline{\mathrm{E}_0}e^{2i\delta}\frac{1}{\zeta} \tag{8}$$

ここで、$\overline{\mathrm{A_K}}\equiv\overline{\Phi'(\zeta'_{\mathrm{K}})}$ $\qquad \mathrm{B_K}\equiv\dfrac{\mathrm{E_K}}{\omega'(\zeta'_{\mathrm{K}})}$ である。

クラック先端での応力拡大係数は、複素応力関数$\Phi(\zeta)$および写像関数$\omega(\zeta)$ を用いて次式で求められる。

$$\mathrm{K_I}-i\mathrm{K_{II}}=2\sqrt{\pi}e^{-i\frac{\lambda}{2}}\frac{\Phi'(\zeta_0)}{\sqrt{\omega''(\zeta_0)}} \tag{9}$$

次式で無次元化した応力拡大係数を用いる。

$$F_{\mathrm{I}}+iF_{\mathrm{II}}=\frac{1}{\mathrm{H}_0^2\cdot\mu_e}\frac{\mathrm{K_I}+i\mathrm{K_{II}}}{\sqrt{\pi\left(\dfrac{2a+c}{2}\right)}} \tag{10}$$

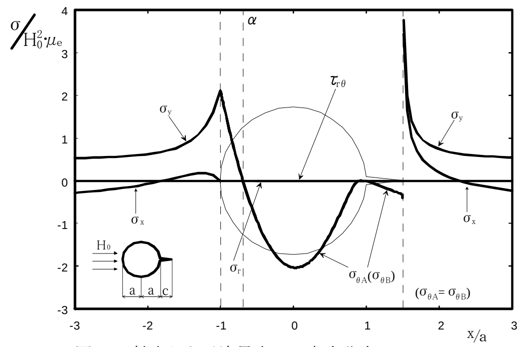

図3　X軸上および境界上での応力分布　（δ=0°　c/a=0.5）

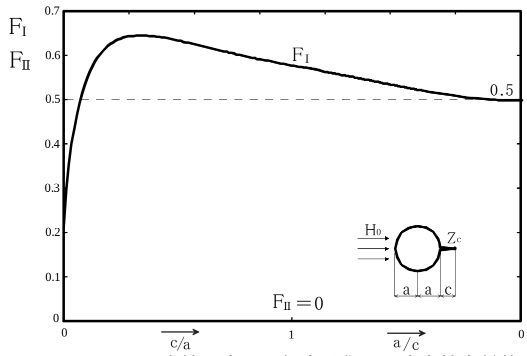

図4　クラック先端Zc点での無次元化した応力拡大係数
（δ=0°）

図２は0°、c/a = 0.5 の場合の磁場の分布を示す。磁場の強さは磁場の流れる方向から円孔をつつみ込む様に分布しているのがわかる。図３は応力分布を示す。クラックの付け根では応力は0である、またクラック先端で応力集中が生じており、クラック先端近傍の x 軸上のσ_xはクラックの先端に近づくにつれて圧縮から引張へと変化していき、σ_yは引張で無限に大きくなっている。磁場の流れる方向と平行方向に圧縮応力、垂直方向に引張応力が生じているのがわかる。図４は無次元化した応力拡大係数を示す。横軸に c/a あるいは a/c をとり、これによってクラック長０～∞に対する応力拡大係数が示される。a/c = 0は無限長のクラックあるいは円孔の大きさが０とみなすことができる。c/a = 0.26 でF_{I}は最大値を示す。a/c = 0としたときF_{I}は 0.5 に収束する。F_{II}は x 軸に関する対称性より常に 0 である。図５は磁場方向を0°～180°へと変化させたときのクラック先端$\mathrm{Z_C}$点での無次元化した応力拡大係数を示す。F_{I}は δ = 45°, 135°で 0 となり、δ = 0°, 180° で最大値 , δ = 90° で最小値を示す。F_{II}は , δ = 0°, 90°, 180° で 0 となり , δ = 135° で最大値 , δ = 45° で最小値を示す。

４．まとめ

円孔にクラックを有する形状の無限板に磁力の作用する場合の外力境界値問題の解析をした。解法はクラックの問題にも応用でき、クラックの進展の解析を行うことができる。任意方向の磁場δによるクラック先端の応力拡大係数F_{I} , F_{II}はそれぞれのδ = 0°, 45°の値により計算できる。また写像関数の係数を変えることにより任意の形状の解析ができる。

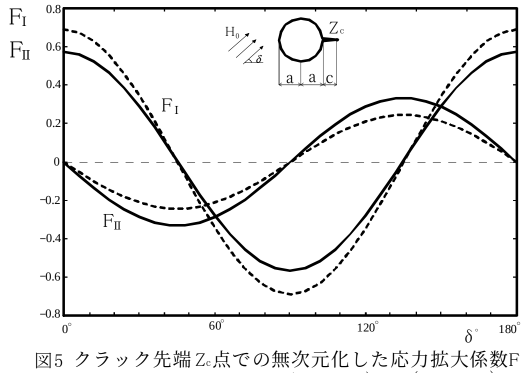

図5 クラック先端Zc点での無次元化した応力拡大係数F
--- (c/a = 0.3)　— (c/a = 0.5)

参考文献

[1]Norio Hasebe and Y.Z Chen "Int.J of Fracture ,77,1996,351-366" [2] 砂川重信 " 理論電磁気学　紀伊国屋書店 1999　第３版 "