

物体力を伴う横等方性体の円柱座標における 3 次元弾性解について

北見工業大学 フェロー 奥村 勇

1. まえがき 最近の 3 次元弾性問題は、複合材料、機能性材料及び異方性材料に関するものが多くなった。等方・等質弾性体に関する研究は、未だに解決されていない個々の境界値問題を除けば、ほぼ峠を越えた様である。異方性体に関する 3 次元弾性問題は、適用し易い 3 次元弾性解が、Elliott 及び Lodge により古くに発見されているため、横等方性体が最も多く研究されている。Elliott の解及び Lodge の解は、3 次元弾性体の単なる境界値問題に限らず、弾性体中の亀裂、空か或いは介在物の難解な境界値問題に迄応用されている。他方、物体力が存在する横等方性体の 3 次元弾性問題は、余り見受けられないが、仮に物体力を温度勾配に置換すると、そのまま、横等方性体の熱弾性解に還元するので、理論的には、興味のある課題である。

本研究は、物体力が存在する場合の横等方性体の 3 次元弾性解を 3 つのポテンシャル関数を用いて求めるものである。変位成分をポテンシャル関数により如何に表現するかは、理論上、最も大切で且つ困難な仕事になるが、横等方性体の場合には、前述した Elliott の解及び Lodge の解があるので、それらを参考にして首尾よく表現できる。

2. 横等方性体の変位の方程式 変位成分を u_r , u_θ 及び u_z で表し、横等方性体の弾性定数を c_{ij} で表すと、変位の方程式は、次式となる。

$$c_{11} \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} \right) + c_{66} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + c_{44} \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + (c_{12} + c_{66}) \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r \partial \theta} - (c_{11} + c_{66}) \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} + b_r = 0 \quad (1a)$$

$$c_{66} \left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r^2} \right) + c_{11} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + c_{44} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} + (c_{12} + c_{66}) \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \theta} + (c_{11} + c_{66}) \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + (c_{13} + c_{44}) \frac{1}{r} \times \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta \partial z} + b_\theta = 0 \quad (1b)$$

$$c_{44} \nabla_1^2 u_z + c_{33} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + b_z = 0 \quad (1c)$$

ここで、 b_r , b_θ 及び b_z は、物体力を表し、また、

$$\nabla_1^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \quad c_{66} = \frac{c_{11} - c_{12}}{2} \quad (2a, b)$$

3. 変位ポテンシャルの支配方程式 いま、変位成分を変位ポテンシャル ϕ , ψ_1 及び ψ_2 により、次の様に表す。

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta}, \quad u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi_1}{\partial r}, \quad u_z = k \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \psi_2}{\partial z} \quad (3a-c)$$

ここで、 k は、後に定められる係数である。

式(3a-c)を式(1a-c)に代入すると、変位ポテンシャルの支配方程式が次の様に得られる。

$$c_{11} \frac{\partial}{\partial r} \left(\nabla_1^2 \phi + v \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{c_{13} + c_{44}}{c_{11}} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} \right) + c_{66} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\nabla_1^2 \psi_1 + v_3 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} \right) + b_r = 0 \quad (4a)$$

キーワード：弾性，異方性，横等方性，3 次元，物体力。

住所：〒090-8507, 北見市公園町 165 番地, Tel.(0157)26-9472, Fax.(0157)23-9408.

$$c_{11} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\nabla_1^2 \phi + \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{c_{13} + c_{44}}{c_{11}} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} \right) - c_{66} \frac{\partial}{\partial r} \left(\nabla_1^2 \psi_1 + \nu_3 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} \right) + b_\theta = 0 \quad (4b)$$

$$\nabla_1^2 \phi + \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{c_{44}}{c_{44}k + c_{13} + c_{44}} \left(\nabla_1^2 \psi_2 + \frac{c_{33}}{c_{44}} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} + \frac{b_z^*}{c_{44}} \right) = 0 \quad (4c)$$

ここで、

$$k = \frac{c_{11}\nu - c_{44}}{c_{13} + c_{44}}, \quad \nu_3 = \frac{c_{44}}{c_{66}} = \frac{2c_{44}}{c_{11} - c_{12}}, \quad \frac{c_{33}k}{c_{44}k + c_{13} + c_{44}} = \nu, \quad b_z = \frac{\partial b_z^*}{\partial z} \quad (5a-d)$$

式(4a-c)は、 ϕ 、 ψ_1 及び ψ_2 に関する3元連立偏微分方程式であるが、式(4c)を用いて、式(4a,b)から ϕ を消去すると、次の2つの方程式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\nabla_1^2 \psi_2 + \frac{c_{33}}{c_{11}\nu} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} \right) - \frac{c_{66}}{c_{44}} \frac{c_{44}k + c_{13} + c_{44}}{c_{11}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\nabla_1^2 \psi_1 + \nu_3 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} \right) = \frac{1}{c_{44}} \left(\frac{c_{44}k + c_{13} + c_{44}}{c_{11}} b_r - \frac{\partial b_z^*}{\partial r} \right) \quad (6a)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\nabla_1^2 \psi_2 + \frac{c_{33}}{c_{11}\nu} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} \right) + \frac{c_{66}}{c_{44}} \frac{c_{44}k + c_{13} + c_{44}}{c_{11}} \frac{\partial}{\partial r} \left(\nabla_1^2 \psi_1 + \nu_3 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} \right) = \frac{1}{c_{44}} \left(\frac{c_{44}k + c_{13} + c_{44}}{c_{11}} b_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial b_z^*}{\partial \theta} \right) \quad (6b)$$

式(6a,b)は、 ψ_1 及び ψ_2 に関する2元連立偏微分方程式である。その連成を解いた単一の微分方程式から ψ_2 を求め、それを式(4c)に代入して ϕ を求めると、解が得られることになる。

4. 結果 式(6a,b)の連成は、2つの方程式の2つの項が揃っているのもので、比較的容易に解くことができる。連成を解き、式(4c)を変形すると、結果として、次の解を得る。

$$\nabla_1^2 \left(\nabla_1^2 \psi_1 + \nu_3 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} \right) = \frac{1}{c_{66}} \left(\frac{\partial b_\theta}{\partial r} + \frac{b_\theta}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial b_r}{\partial \theta} \right) \quad (7a)$$

$$\nabla_1^2 \left(\nabla_1^2 \psi_2 + \frac{c_{33}}{c_{11}\nu} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} \right) = \frac{1}{c_{44}} \left[\frac{c_{44}k + c_{13} + c_{44}}{c_{11}} \left(\frac{\partial b_r}{\partial r} + \frac{b_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial b_\theta}{\partial \theta} \right) - \nabla_1^2 b_z^* \right] \quad (7b)$$

$$\nabla_1^2 \left(\nabla_1^2 \phi + \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) = -\frac{c_{13} + c_{44}}{c_{11}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\nabla_1^2 \psi_2) - \frac{1}{c_{11}} \left(\frac{\partial b_r}{\partial r} + \frac{b_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial b_\theta}{\partial \theta} \right) \quad (7c)$$

式(7a-c)の解は、物体力 b_r 、 b_θ 及び b_z^* を0と置き、 ψ_2 を除外すると、 ψ_1 及び ϕ は、それぞれ、Lodgeの解及びElliottの解に一致する。いま、物体力を次式の様に温度勾配に置換する。

$$b_r = -\beta_1 \frac{\partial T}{\partial r}, \quad b_\theta = -\beta_1 \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta}, \quad b_z^* = -\beta_3 T \quad (8a-c)$$

ここで、 β_1 及び β_3 は、線膨張係数と弾性定数とからなる材料定数であり、 T は、温度変化を表す。

式(8a-c)を式(7a-c)の右辺に代入すると、次式の熱弾性解を得る。

$$\nabla_1^2 \psi_1 + \nu_3 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} = 0, \quad \nabla_1^2 \psi_2 + \frac{c_{33}}{c_{11}\nu} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} = \frac{1}{c_{44}} \left(\beta_3 - \frac{c_{44}k + c_{13} + c_{44}}{c_{11}} \beta_1 \right) T \quad (9a,b)$$

$$\nabla_1^2 \phi + \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -\frac{c_{13} + c_{44}}{c_{11}} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} + \frac{\beta_1}{c_{11}} T \quad (9c)$$

式(9b,c)は、Okumura及びNodaが求めた横等方性体の熱弾性ポテンシャルに一致している。式(9c)の右辺の $\partial^2 \psi_2 / \partial z^2$ は消去できるが、その過程は、極めて煩雑である。

5. あとがき 直交座標を除外すると、物体力が存在する場合の異方性体の3次元弾性解は、極めて難解であるが、横等方性体に関しては、円柱座標においても比較的容易に求められた。式(6a,b)の連成を解く過程は、講演会当日に報告する。