

はく離、き裂を有する弾性体の縦せん断問題の解析

名古屋市 正員 草野 喜雄
名古屋工業大学 正員 長谷部宣男

1. はじめに

図1に示す遠方に一様縦せん断が作用する無限体中に円形剛体介材物が存在し、その一部分がはく離、また、き裂が発生している状態を考える。この問題は外力境界と変位境界が1ヶ所ずつ有する混合境界値問題である。

また、はく離端では、応力集中によりクラックの発生を考えている。はく離、クラックのエネルギー解放率を用いて、はく離がどこまで進展するか、どこでクラックが発生するかを考える。

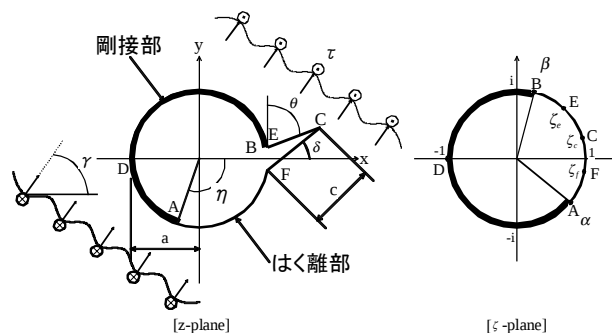


図1 解析形状と写像面上の単位円

2. 応力分布

解析には次式で表される、任意方向に直線クラックを有する円孔の外部領域を単位円外に等角写像する写像関数を用いる。

$$\omega(\zeta) = z = ie^{-i\theta} \left\{ \frac{z_b(\zeta+1)}{\zeta+1-(\zeta-\zeta_f)^p(\zeta-\zeta_e)^{1-p}} - iae^{-i\theta} \right\}$$

ただし $p = \theta/\pi$ である。

無限遠点において一様せん断応力 τ が作用し、境界条件を満足する複素応力関数は次式のように決められる。

$$\phi(\zeta) = -\frac{\tau}{G} e^{i\gamma} E_0 \chi(\zeta) - \frac{\tau}{G} e^{-i\gamma} \frac{\overline{E_0} \chi(\zeta)}{\zeta \chi(\zeta)}$$

ここで E_0 は、写像関数 $\omega(\zeta)$ の ζ の係数である。 $\chi(\zeta)$ は plemelj 関数で $\chi(\zeta) = (\zeta - \alpha)^{0.5} (\zeta - \beta)^{0.5}$ 、 α, β ははく離端の座標である。クラック長さ $c = 0.5$ 、クラック方向 $\theta = 45^\circ$ はく離位置 $\theta_\alpha = -60^\circ$ 、 $\theta_\beta = 30^\circ$ 縦せん断荷重作用方向 $\gamma = 45^\circ$ の場合の応力分布例を図2に示す。

3. 応力拡大係数

クラック先端での応力拡大係数は、次式で求められる。

$$K = G\sqrt{\pi}ie^{-i\frac{\delta}{2}} \frac{\phi'(\zeta_0)}{\sqrt{\omega''(\zeta_0)}}$$

ここで、 δ は、クラックと x 軸のなす角度である。また、 ζ_0 は、クラック先端の単位円上の点である。

4. はく離の強さ

はく離先端での応力特異性を示す指標として、はく離の強さは、次式で求められる。

$$\bar{\beta} = \frac{[\omega'(\beta)(\beta - \alpha)^{0.5} g(\beta)]}{\omega'(\beta)(\beta - \alpha)} \exp \left\{ \frac{i}{2} (\theta'_\beta - \theta'_\alpha) \right\}$$

$$\theta'_\alpha = \arg(\beta - \alpha) \quad \theta'_\beta = \lim_{\zeta_R \rightarrow \beta} [\arg(\zeta_R - \beta)]$$

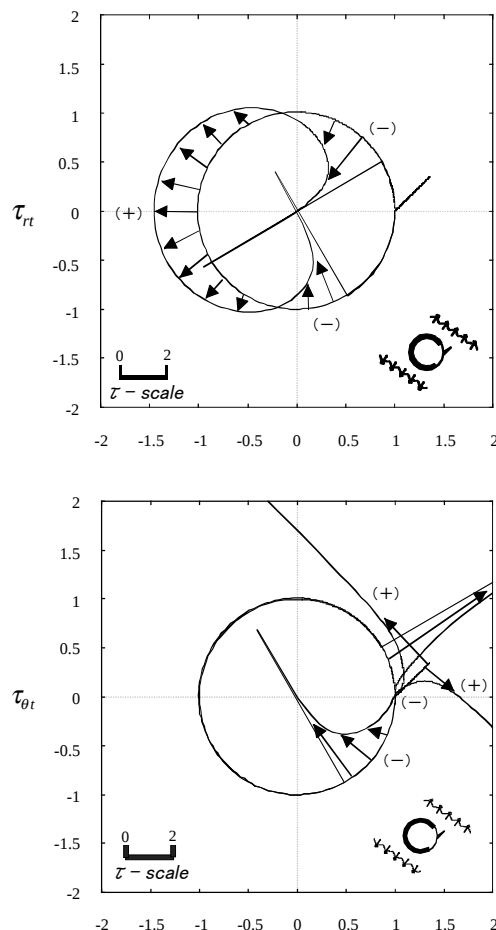


図2 境界上の応力分布

$\theta_\alpha = -60^\circ, \theta_\beta = 30^\circ, \theta = 45^\circ, c = 0.5, \gamma = \pi/4$

キーワード：はく離、クラック、エネルギー解放率

連絡先：〒466-0061 名古屋市昭和区御器所町 tel 052-735-5482 fax 052-735-5482

5. はく離クラックの連成問題

一般的には、ある大きさの荷重のもとで、はく離が発生、進展し、その後クラックが発生する場合のあることが知られている。したがってここでははく離端からクラックの発生した直後（クラック長さ→0）を考える。 $\beta = \zeta_e$ として、さらにクラック長さが0に対応するクラック先端の座標を ζ_{c0} とすれば、クラック長さが0になった時のクラック先端での応力拡大係数は、次式で求められる。

$$K = G\sqrt{\pi}ie^{-i\frac{\delta}{2}} \frac{F_1(\zeta_{c0})}{\sqrt{F_2(\zeta_{c0})}}$$

$$F_1(\zeta) = -\frac{\tau}{2G} \left[e^{i\gamma} E_0 \left\{ \frac{2\zeta - \alpha - \beta}{(\zeta - \alpha)^{0.5}} \right\} + e^{-i\gamma} \frac{\overline{E_0}}{\chi(0)} \left\{ \frac{\alpha\zeta + \beta\zeta - 2\alpha\beta}{\zeta^2(\zeta - \alpha)^{0.5}} \right\} \right]$$

$$F_2(\zeta) = 2aie^{-i\theta} \sin\theta (p\zeta_e + (1-p)\zeta_f + 1) \frac{\left(\frac{\zeta - \zeta_e}{\zeta - \zeta_f} \right)^p}{\left\{ \zeta + 1 - (\zeta - \zeta_e)^p (\zeta - \zeta_f)^{1-p} \right\}^2}$$

どのような条件の時、はく離が進展するか、またはクラックが発生するかを調べるためにはく離の進展のエネルギー解放率 G_d とクラック発生エネルギー解放率 G_c を用いる。母材と介在物の接着の強さに関する破壊靱性と、母材中へのクラックの発生に関する破壊靱性、すなわち、母材の破壊靱性とは一般に異なった値になる。エネルギー解放率により表されるはく離進展の破壊靱性を G_{d0} 、同じくクラック発生の破壊靱性を G_{c0} と表す。 G_d と G_{d0} 、および G_c と G_{c0} の値の大小関係より破壊現象は以下の4つの場合に分類できる。

- (A) $G_d < G_{d0} \cap G_c < G_{c0}$ の場合：そのはく離は進展せず、クラックも進展しない。
- (B) $G_d < G_{d0} \cap G_c > G_{c0}$ の場合：そのはく離は進展せず、クラックが発生する。
- (C) $G_d > G_{d0} \cap G_c < G_{c0}$ の場合：そのはく離が進展し、クラックは進展しない。
- (D) $G_d > G_{d0} \cap G_c > G_{c0}$ の場合：そのはく離も進展し、クラックも進展する可能性がある。

上記(A)～(C)では、それぞれの破壊現象が特定できる。(D)条件の場合は、さらにはく離とクラックのどちらの現象が起きるかを判断することが必要になる。このため、はく離とクラックのエネルギー解放率の比 C 、およびはく離とクラックの破壊靱性値の比 C_0 を考える。 C は次式で与えられる。

$$C = G_d / G_c$$

一方、 C_0 は、破壊靱性試験より求まる破壊靱性 G_{d0} 、 G_{c0} の値を用いて次式で表せる。

$$C_0 = G_{d0} / G_{c0}$$

あるはく離の大きさに対して、 C と C_0 の値の大小関係より、いずれの破壊現象が生じるかを定めることができる。

- (U) $C < C_0$ の場合：クラックが発生する。 $\because G_d / G_{d0} < G_c / G_{c0}$
- (V) $C > C_0$ の場合：はく離が発生する。 $\because G_d / G_{d0} > G_c / G_{c0}$

あるはく離の大きさに対してクラックの発生方向は、クラック発生直後のエネルギー解放率が最大の方に発生するとする。図3にははく離の中心角 η に対してクラックのエネルギー解放率が最大になるようなクラック角 θ を取るときのクラック発生のエネルギー解放率 G_c とはく離のエネルギー解放率 G_d を示す。また、それらの比をとった値を図4に示す。

6. まとめ

縦せん断荷重が作用した場合の応力分布を示した。また、はく離とクラックの連成問題を解くことで、どこまでのはく離が進展し、どこでクラックがどの方向に発生するかを解析した。

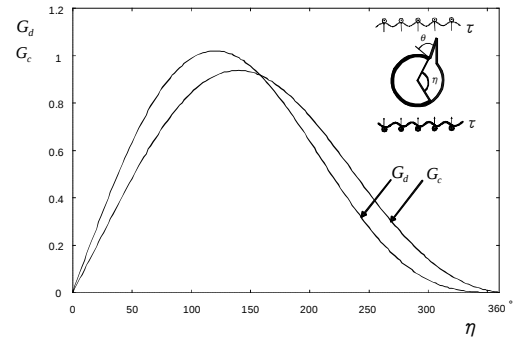


図3 エネルギー解放率

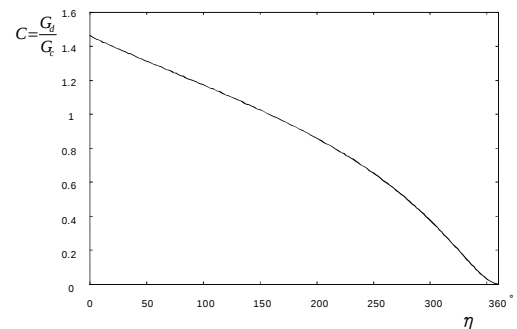


図4 エネルギー解放率の比