高速多重極境界要素法による半空間中の音響場の解析

福井大学工学部　学生会員　○　小 塚　みすず
福井大学工学部　正会員　　　　福 井　卓 雄

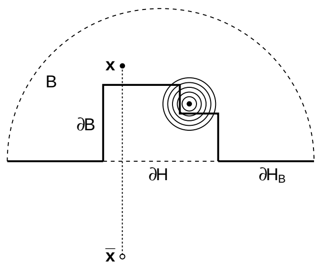
1　はじめに

屋外の音響の場を解析する手法として境界要素法が有効に利用されている。しかしながら、波動問題において境界要素法を利用する際に、自由度の大きな問題を解析するためには境界要素法を効率化する必要がある。そこで、本研究では、地表から上の空間を半空間と考えて、その中での波動問題を高速多重極境界要素法を用いて解析する手法を開発する。

2　半空間音響場の境界要素法

2.1　半空間における境界積分方程式

Helmholtz 方程式に支配される場について考える。**図–1** のように、空間を 2 分する直線を ∂H とし、対象とする半空間を H としよう。ここで、 ∂H は半空間 H に対して外向きになるようにとるものとする。半空間中の散乱体の境界を ∂B とし、 ∂H から ∂B によって覆われる部分を除いた境界を ∂H_B とする。対象となる領域 B は $\partial B + \partial H_B$ を境界とする無限空間である。いま、波動場を u として、 ∂H_B の上で境界条件 $\partial u/\partial n = 0$ が与えられているとする。このとき、境界値問題は $(\partial B = \partial B_1 + \partial B_2)$



図–1　半空間中の音響場

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0 \qquad \text{in } B \tag{1}$$

$$u = \hat{u} \quad \text{in } \partial B_1, \qquad \frac{\partial u}{\partial n} = \hat{s} \quad \text{on } \partial B_2 \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \qquad \text{on } \partial H_B \tag{3}$$

となる。ここに、 ∇^2 は Laplace 作用素、 k は波数、$\partial/\partial n$ は外向き法線微分を示す。

Green 公式を導くにあたり、半空間の Green 関数

$$\begin{aligned} G_H(x,y) &= G(x,y) + G(x,\bar{y}) \\ &= \frac{i}{4}H_0^{(1)}(k|x-y|) + \frac{i}{4}H_0^{(1)}(k|x-\bar{y}|) \end{aligned} \tag{4}$$

を使う。Green 関数 G_H は ∂B や ∂H_B における境界条件を満足するから, Green の公式は

$$\begin{aligned} C(x)u(x) &= \tilde{u}(x) \\ &+ \int_{\partial B} \left[G_H(x,y)\frac{\partial u}{\partial n}(y) - \frac{\partial G_H(x,y)}{\partial n_y}u(y) \right] dS_y \end{aligned} \tag{5}$$

となる。ここに、$\tilde{u}$ は ∂H_B における境界条件を満足する入射波で、C は点 x の位置に依存するパラメータで、x が領域内のとき $C = 1$、領域のとき $C = 0$、滑らかな境界 ∂B 上にあるとき $C = 1/2$ の値をとる。

屋外音響を扱う場合には極めて高い波数の問題を解析する必要がある。この場合の仮想固有値の影響を避けるために、ここでは、Burton と Muller により提案された境界積分方程式

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left[u(x) + \alpha\frac{\partial u}{\partial n}n(x) \right] &= \left[\tilde{u}(x) + \alpha\frac{\partial \tilde{u}}{\partial n}(x) \right] \\ &+ \int_{\partial B} \left[G_H(x,y) + \alpha\frac{\partial G_H(x,y)}{\partial n_x} \right] \frac{\partial u}{\partial n}(y) ds_y \\ &- \int_{\partial B} \left[\frac{\partial G_H(x,y)}{\partial n_y} + \alpha\frac{\partial^2 G_H(x,y)}{\partial n_x \partial n_y} \right] u(y) ds_y \end{aligned} \tag{6}$$

を解析に使った。

2.2　半空間における高速多重極法

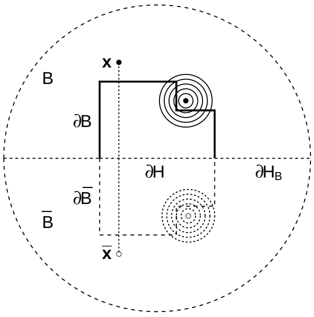
図 –2 のように鏡像空間を考慮し、Green 公式 (5) を書きなおすと

$$\begin{aligned} C(x)u(x) &= \tilde{u}(x) \\ &+ \int_{\partial B} \left[G(x,y)\frac{\partial u}{\partial u}(y) - \frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y}u(y) \right] ds_y \\ &+ \int_{\partial \bar{B}} \left[G(x,\bar{y})\frac{\partial u}{\partial u}(y) - \frac{\partial G(x,\bar{y})}{\partial n_y}u(y) \right] ds_{\bar{y}} \end{aligned} \tag{7}$$

となる。したがって、鏡像空間上の境界値を

$$u(\bar{y}) = u(y), \qquad \frac{\partial u}{\partial \bar{n}}(\bar{y}) = \frac{\partial u}{\partial n}(y) \qquad (8)$$

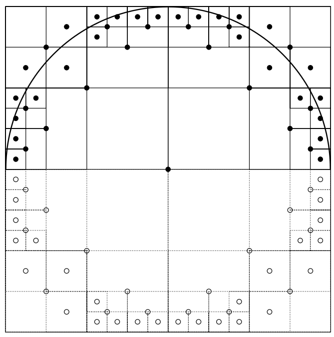
とすれば、全空間の境界 $\partial B + \partial \bar{B}$ における境界積分表現が得られ、この積分を高速多重極法を使い計算すれば、容易に境界積分方程式を解くことができる。



図–2 実空間と鏡像空間

次に、半空間における高速多重極法の計算手順を示す。

1. まず、半空間の境界 ∂B だけを木の構造に分割する。鏡像空間におけるセルは、実空間のセルの鏡像をとることにより定義できる。



図–3 境界のセル分割

2. 上向演算により半空間内のセルにおける多重極モーメントを求める。鏡像空間のセルにおける多重極モーメントは、関係

$$M_n(\bar{y}_0) = (-1)^n M_{-n}(y_0) \qquad (2D) \qquad (9)$$

$$M_n^m(\bar{y}_0) = (-1)^{n+m} M_{-n}^m(y_0) \qquad (3D) \qquad (10)$$

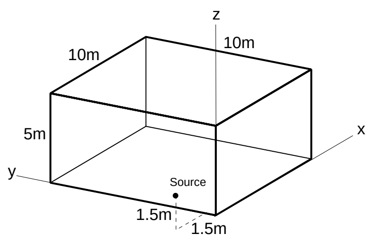
により、容易に決定できる。

3. 下向演算は、半空間中のセルについてだけ、通常の高速多重極法と同様に行なう。ただし、近傍演算において、鏡像領域にセルが存在する場合には、直接に鏡像の計算をする。

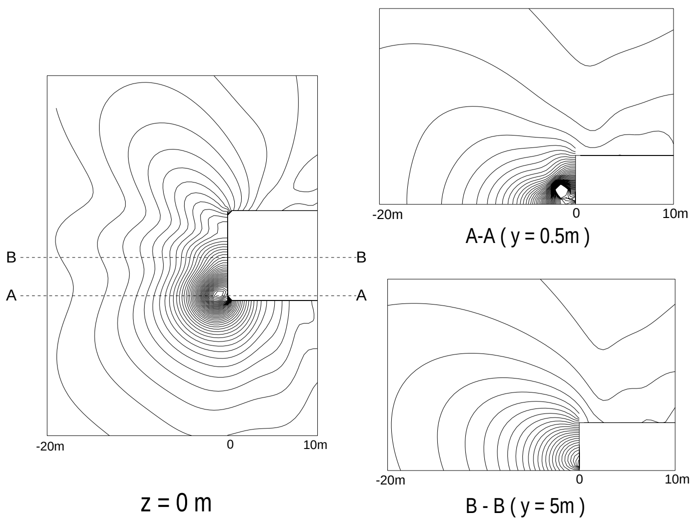
この方法による計算量は、鏡像空間を含めた全空間を解析する場合の約半分であった。

2.3 数値解析例

建物は、長さ・幅ともに 10m、高さ 5m とした。音源は、建物の角の壁と地表からそれぞれ 1.5m の位置とした。音源の周波数は 50Hz である。要素数は 7500 である。



図–4 建物モデルと点音源位置



図–5 建物角部における音圧の絶対値分布図

建物の角部に点音源を置いたので音圧分布は対称ではない。周波数が低いため、音波が回折しているようすがわかる。A-A、B-B 断面の分布図を比べると、音源に近い方 (A-A) は、比較的早く音が減少している。そして、音源から遠い位置にある方 (B-B) が、等高線が斜め上の方に大きく広がっており音の伝播し易い方向であることがわかる。いずれにせよ、音は地表と建物の壁とで反射されて斜め上方に伝播する傾向があるといえる。

キーワード：高速多重極境界要素法、多重極モーメント、Burton と Muller の境界積分方程式
連絡先：〒 910-0017 福井市文京 3-9-1 福井大学工学部建築建設工学科　TEL:0776-27-8596　FAX:0776-27-8746