

波動問題の境界要素解析における反復法の前処理について

福井大学工学部
長谷工コーポレーション
福井大学工学部

学生員 ○ 近藤 喜彦
大澤 克樹
正会員 福井 卓雄

1 はじめに

境界要素法の大規模問題を高速に解析する手法として高速多重極法を用いる方法が近年注目されてきている。とくに、波動問題においては、無限領域を取り扱うことが多く境界要素法の利用が有利である。その場合であっても、周波数の高い問題を取り扱う場合には要素のサイズを小さくする必要があり、必然的に要素数の大きな問題を扱うことになる。このような問題に高速多重極法による解法の効率化は有効である。高速多重極法を利用する場合には、近似離散方程式を反復法により解かなければならないが、適切な反復回数で解を得るためには、問題に応じた前処理が是非必要である。

本報告では、Helmholtz 方程式の解析を対象として、従来型の境界要素法および高速多重極境界要素法を用いて、反復法による解析を行ない、高速多重極法を使用する場合に利用できるいくつかの前処理について、その効果を比較検討した。

2 境界積分方程式

2次元空間中の周波数領域波動散乱問題を考える。散乱体の外部領域を B 、境界を ∂B とする。波動場 u は Helmholtz 方程式を満足する。境界値問題は

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0 \quad \text{in } B \quad (1)$$

$$u = \hat{u} \quad \text{on } \partial B_1 \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \hat{s} \quad \text{on } \partial B_2 \quad (3)$$

である。ここに、 ∇^2 は Laplace 作用素、 k は波数、 $\partial/\partial n$ は外向き法線微分を示す。

この問題の解 u は、一般化された Green 公式により積分表現され、通常は、Green 公式をそのまま境界積分方程式として使って、その離散解析を行なう。しかしながら、外部領域における境界要素解析においては、本来存在しないはずの仮想的な固有値により数値解が乱されるという問題が起こりうる。とくに、波数の大きな問題においては数値解の乱れは深刻であり、反復法がまっ

たく収束しない場合もありうる。ここでは、仮想固有値の影響を避けるために、Burton と Miller により提案された境界積分方程式

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[u(\mathbf{x}) + \alpha \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x}) \right] &= \left[\tilde{u}(\mathbf{x}) + \alpha \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n}(\mathbf{x}) \right] \\ &+ \int_{\partial B} \left[G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \alpha \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n_x} \right] \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{y}) ds_y \\ &- \int_{\partial B} \left[S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \alpha \frac{\partial S(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n_x} \right] u(\mathbf{y}) ds_y \quad (4) \end{aligned}$$

を使う。ここに、 $\tilde{u}$ は入射波、 G, S は基本特異解および第二基本特異解である。上式は、Green 公式とその境界上の法線勾配の線形結合をとったものであり、結合パラメータ α は複素数である。ここでは、 $\alpha = -i/k$ を用いている。

3 前処理の方法

方程式

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (5)$$

が与えられているときに、行列 $\mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{M}_2^{-1} = \mathbf{M}^{-1}$ を (5) の左右から乗じて、

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}_2^{-1} \tilde{\mathbf{x}} &= \mathbf{M}_2\mathbf{x}, \quad \tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{b} \\ \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}} &= \tilde{\mathbf{b}} \end{aligned} \quad (6)$$

とおく。ここで、変換後の行列が $\mathbf{A} \simeq \mathbf{I}$ であれば、反復法は極めて速く収束する。変換 (6) を前処理と呼び、 $\mathbf{M}$ のことを前処理行列という。

以下では、いくつかの前処理法について、境界積分方程式 (4) を GPBiCG を使って解き、それらの特性について見る。

4 前処理法

次の5種類の前処理法について解析を行なった。

1. Jacobi 法

最も簡単な前処理法で、前処理行列 $\mathbf{M}$ の成分を

$$m_{ij} = \begin{cases} a_{ii} & \text{if } i = j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (7)$$

とする。いわゆる行や列のスケーリングとして知られる方法であるが、一般に、境界要素法に現れる行列は比較的性質が良いので、問題によってはこれで十分な場合も多い。

2. ブロック Jacobi 法

Jacobi 法の対角成分のかわりに、対角部分の小行列を取り出して M とする方法である。Jacobi 法よりも多くの情報を反映できるので、一般に収束性は上がる。ただし、反復ごとに小行列を解くことになるので、大きめの小行列を選ぶ場合には一反復あたりの計算時間は増加する。

3. Wavelet 変換と Jacobi 法の併用

任意のベクトル v について、Haar wavelet 変換 Wv は直交変換となる。したがって、行列 A を WAW^T のように変換しても、その性質は改善されない。しかし、変換後の行列では、対角付近にもとの行列の全情報が集中する傾向がある。そこで、変換後の行列に Jacobi 法を併用してやれば、収束性が改善されると期待できる。

4. LU-Band 法

境界要素法で現れる係数行列は、対角付近の項の絶対値が比較的大きい、一般的には性質の良い行列である。そこで、前処理行列として、係数行列の部分帯行列の逆を取ることにすれば、収束を改善できると考えられる。ここでは、係数行列の部分帯行列を LU 分解して前処理を実行する。行列の次元が極めて大きい場合には、帯の幅をあまり大きくすることができないという制約があるが、一般的なサイズであれば有効であると考えられる。

5. A 法・A-Band 法

積分方程式 (4) において Neumann 条件を与えるものとする、その積分方程式は超特異な積分核 $\partial S/\partial n$ を含む。このような核に基本解 G をかけて境界で積分すれば、この超特異性を緩和することができる。したがって、前処理法として、基本解 G の離散行列を M^{-1} として利用すれば、収束性を改善できることが期待できる。また、この方法の利点は、高速多重極法を使って前処理演算が実行できることである。ここでは、 G の離散行列を直接使用する方法と、 G の離散行列の部分帯行列を前処理行列として使う方法とを試みた。

5 解析結果

図-1 は反復回数の波数依存性をまとめたものである。低い波数で効果を発揮する前処理と、高い波数で効果

を發揮する前処理法があることがわかる。A 法は低い波数域では効果的である。また、Wavelet-J 法と LU-b 法は広範囲の波数である程度の効果を發揮している。図-2

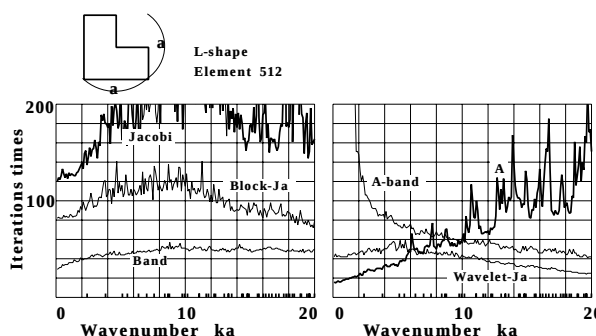


図-1 波数に対する反復回数

は反復回数の要素数依存性をまとめたものである。帯行列を使う方法は要素数が大きくなると要素数依存性はほぼ同じになるが、Wavelet-J 法では反復回数増加の勾配がかなり小さいことが分かる。

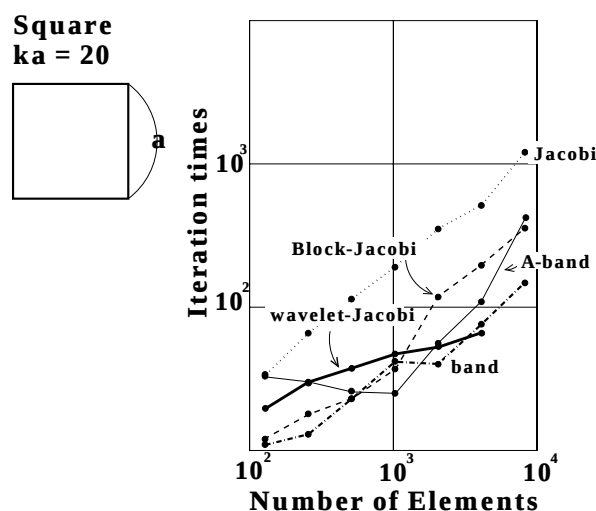


図-2 要素数に対する反復回数

グラフは直接解法の境界要素法による結果と高速多重極法を用いた結果とをつないで表しているが、これらの2つ方法の結果の間にまったく違いは見られない。しかしながら、高速多重極法を使う場合に利用可能な前処理法には大きな制約がある。今後は、さらに多くの場合について数値計算を行ない、より有効な方法を探索したいと考えている。

キーワード：波動問題, 境界要素法, 前処理法, 高速多重極法
連絡先：〒 910-0017 福井市文京 3-9-1
福井大学工学部建築建設工学科
Tel : 0776-27-8596 Fax : 0776-27-8746