

Wavelet 重み付き Gauss 積分公式の構成と その wavelet BEM への適用

新潟大学大学院 学生会員 紅露一寛
新潟大学工学部 正会員 阿部和久

1. はじめに

Wavelet 基底を用いた境界要素解析における係数行列は、基底のゼロモーメント性によって微小となった係数成分を切り捨てることでスパース化される。解析においては反復法の適用によって方程式の求解に要する計算量が大幅に削減されるため、解析時の計算時間の大半は二重積分で与えられる係数行列成分の評価に費やされる。境界要素解析で用いられる wavelet 基底の多くはスプラインで与えられる。そのため、境界積分を実行する際には積分区間の細分割が必要となり、係数行列作成時に多大な計算量を要する原因の一つとなる。このことは数値積分によって係数进行评估する場合においてより顕著なものとなる。そこで本研究では、上述の問題点を解決するために wavelet 基底を重み関数とした Gauss 積分公式を構成する。本手法を境界要素解析に適用し、係数行列作成時における計算時間の短縮効果について検討する。

2. Wavelet

Wavelet は scaling 関数 ϕ と wavelet ψ の 2 種類の関数によって構成され、境界積分方程式を離散化するための基底関数・重み関数として用いられる。Wavelet 基底によって張られる部分空間は次の階層構造を有する。

$$V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_k \subset \cdots \subset L^2[0, 1], \quad V_{k+1} = V_k + W_k, \quad (1)$$

ここで、部分空間 V_k , W_k の基底はそれぞれ $\phi_{k,j} = 2^{\frac{k}{2}}\phi(2^k\xi - j)$, $\psi_{k,j} = 2^{\frac{k}{2}}\psi(2^k\xi - j)$ となる。

本研究では、非直交 wavelet¹⁾ を基底に用いる。補間次数とゼロモーメント次数をそれぞれ m , n とすれば、scaling 関数 ϕ^m と wavelet ψ_n^m はスプラインにより次式で与えられる。

$$\phi^m := \frac{1}{m!} \sum_{j=0}^{m+1} (-1)^j \binom{m+1}{j} \left(\xi + \frac{h}{2} - j \right)_+^m, \quad \psi_n^m := \frac{1}{m!} \sum_{j=0}^{m+n+1} (-1)^j \binom{m+n+1}{j} (2\xi + h - j)_+^m. \quad (2)$$

ここで、 h は基底のサポート長で、 $h = m + 1$ (scaling 関数), $h = (m + n + 1)/2$ (wavelet) となる。なお、 ψ_n^m は n 次のゼロモーメント性 ($n - 1$ 次以下の多項式との直交性) を有する。

3. Wavelet 重み付き Gauss 積分公式

$(2N - 1)$ 次多項式 f_{2N-1} と重み関数 w に関する次の積分を考える。

$$I := \int_{-h/2}^{h/2} f_{2N-1}(x)w(x) dx. \quad (3)$$

なお、 $w(x)$ は上述の wavelet 基底 ϕ^m , ψ_n^m のいずれかで与えられるものとする。また、整数 N は $N \geq 1$ (scaling 関数), $N \geq n + 1$ (wavelet) とする。

式(3)において、 $f_{2N-1} = P_N \cdot Q_{N-1} + R_{N-1}$ と展開し、 P_N を w に関して直交な N 次多項式に選ぶと次式を得る。

$$I = \int_{-h/2}^{h/2} \left[P_N(x) Q_{N-1}(x) + R_{N-1}(x) \right] w(x) dx = \int_{-h/2}^{h/2} R_{N-1}(x)w(x) dx. \quad (4)$$

ここで、 $P_N(x) = 0$ の根を x_i ($i = 1, \dots, N$) とする。 x_i が $[-h/2, h/2]$ で全て単根で与えられる場合、 R_{N-1} は Lagrange 補間式によって表現できる。その結果、式 (3) の積分は次式で与えられる²⁾。

$$I = \sum_{i=1}^N \frac{f_{2N-1}(x_i)}{P'_N(x_i)} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{P_N(x)}{x - x_i} w(x) dx = \sum_{i=1}^N \alpha_i f_{2N-1}(x_i), \quad \alpha_i := \frac{1}{P'_N(x_i)} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{P_N(x)}{x - x_i} w(x) dx. \quad (5)$$

ここで、 x_i は積分点座標であり、 α_i は重み係数である。また、 N は積分点数となる。

式(5)の公式は計算時に $w(x_i)$ の評価を必要としないため、積分区間の分割が不要となる。なお、本公式は他の Gauss 型積分公式同様、 $(2N - 1)$ 次の厳密性を有する。 $w = \phi^m$ の場合には全ての N について公式は構成可能であるが、 $w = \psi_n^m$ の場合には直交多項式の一意性や w の非正值性に関する制約により、公式を構成できない積分点数が存在する³⁾。表-1 に $w = \psi_n^2$ ($m = 2$) において適用可能な積分点数を例示しておく。

Key words : wavelet 境界要素法, 非直交 wavelet, wavelet 重み付き Gauss 積分公式, 数値積分
連絡先 : 〒 950-2181 新潟市五十嵐二の町 8050 番地 TEL (025) 262-7028 FAX (025) 262-7021

4. 積分点数の決定

Wavelet を用いた境界要素法 (Wavelet BEM) は Galerkin 法によって離散化されるため、係数行列作成時には次式の形で与えられる二重積分を評価する必要がある。

$$J := \int_{-\frac{\ell_x}{2}}^{\frac{\ell_x}{2}} \int_{-\frac{\ell_y}{2}}^{\frac{\ell_y}{2}} f(x, y) w_x(x) w_y(y) dy dx = \int_{-\frac{h_x}{2}}^{\frac{h_x}{2}} \int_{-\frac{h_y}{2}}^{\frac{h_y}{2}} F(\xi, \eta) w_x(\xi) w_y(\eta) d\eta d\xi, \quad F(\xi, \eta) := f(\xi, \eta) \frac{dx dy}{d\xi d\eta}. \quad (6)$$

ここで、 w_x, w_y は基底であり、座標 x, y 上でのそれらのサポート長は ℓ_x, ℓ_y で与えられる。なお、以下において下添字 x, y は、 x, y についての積分に関する諸量であることを表す。

式(6)の数値積分誤差 E は、Taylor 展開を用いて次式で評価することができる⁴⁾。

$$E \simeq \frac{|A_n \Omega_{\hat{N}_x}| G_x^{\hat{N}_x+n} G_y^{n+1}}{n! \hat{N}_x!} \left| \frac{\partial^{\hat{N}_x+n} f}{\partial x^{\hat{N}_x} \partial y^n} \right|_{\xi=\eta=0} + \frac{|A_n \Omega_{\hat{N}_y}| G_x^{n+1} G_y^{\hat{N}_y+n}}{n! \hat{N}_y!} \left| \frac{\partial^{\hat{N}_y+n} f}{\partial x^n \partial y^{\hat{N}_y}} \right|_{\xi=\eta=0}, \quad (7)$$

$$A_k := \int_{-\infty}^{\infty} \xi^k w(\xi) d\xi, \quad Q_k := \sum_{i=1}^N \xi_i^k \alpha_i, \quad \Omega_k := A_k - Q_k.$$

ただし、 $\hat{N} = 2N$ (n : even), $2N+1$ (n : odd) とする。また、 G_x, G_y はそれぞれ $\xi = 0, \eta = 0$ での Jacobian である。

Wavelet 基底を用いた境界要素解析を想定した場合、積分誤差は係数成分の切り捨て誤差⁵⁾と同様に扱うことができる³⁾。そのため、数値積分の許容誤差は係数成分の切り捨て基準値に基づき与えられる。積分点数は、式(7)で与えられる誤差評価値が許容誤差を下回る最少点数に定めればよい。

5. 解析結果

無限領域 Ω からなる 2 次元ポテンシャル問題に本手法を適用し、その有効性について検討する。なお、解析条件は図-1 に示す通りである。境界条件は Neumann 条件 $\bar{q} = 0$ とし、無限遠方のポテンシャル値は $\bar{U}^\infty = x_1$ とした。この場合、係数成分は $q^* = \partial u^* / \partial n$ に関する二重積分で与えられる。なお、境界形状は全て円形で与えられている。

係数作成に要した全計算時間とそれに含まれる数値積分の処理時間を図-2 に示す。なお、比較のために Gauss-Legendre 公式を適用した場合の結果も併せて示しておく。本手法を適用することで、係数作成に関する処理時間は Gauss-Legendre 公式適用時と比べ最大 1/3 程度まで短縮できる。しかし、自由度の増加とともに両者の差は急速に解消されることがわかる。これは、自由度の増加に伴うスパース性の向上により、解析積分可能な同一円孔上の境界積分によって与えられる係数成分の割合が相対的に増していくためである。一方、数値積分に要した計算時間は自由度によらず概ね 1/5 程度まで短縮できていることから、数値積分時の計算量の削減に対しては本手法は有効であることがわかる。なお、本研究において言及していない特異積分・擬似特異積分計算の効率化については今後の検討課題としたい。

表-1 適用可能な積分点数 (ψ_n^2 , $N_g \leq 24$)

n	Number of points N_g
1	Even numbers
2	3, 5, 8, 10, 11, 13, 15, 17, 18, 20, 22, 23
3	4, 6, 12, 14, 18, 20
4	5, 7, 8, 14, 16, 21, 23, 24
5	8, 12, 16, 18, 22
6	7, 9, 18, 20, 21, 24

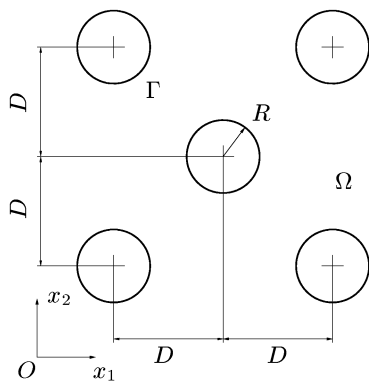


図-1 境界条件. ($\bar{q} = 0$ (on Γ), $\bar{U}^\infty = x_1$, $R = 1, D = 3$)

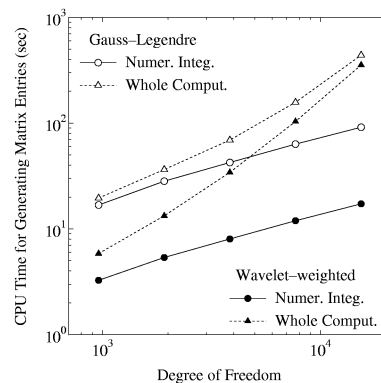


図-2 係数成分の作成時間・数値積分の処理時間の推移。

参考文献

- 1) Koro, K. & Abe, K.: Non-orthogonal spline wavelets for boundary element analysis, *Engng. Anal. Bound. Elems.*, 2001. (to appear)
- 2) Stroud, A.H. & Secrest, D.: *Gaussian quadrature formulas*, Prentice-Hall, 1966.
- 3) Abe, K. & Koro, K.: Gauss quadrature method using wavelet basis as a weighting function for boundary element analysis. *Boundary Elements XXIII*, 2001.
- 4) Lachat, J.C. & Watson, J.O.: Effective numerical treatment of boundary integral equations: a formulation for three-dimensional elastostatics. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 10, pp.991-1005, 1976.
- 5) Koro, K. & Abe, K.: Determination of optimal threshold for matrix compression in wavelet BEM. *Boundary Elements XXIII*, 2001.