形状感度解析によるラーメン構造物の最適形状決定法

東洋大学* 学生員 樋口幸太郎
東洋大学* 正会員 新延泰生
東洋大学* 学生員 佐々木亮

1．はじめに

構造物の幾何形状決定法は様々であり，長さや材料特性等の物理的制約と，構造物の用途を考慮した設計者の意志により決定される方法や，逐次線形計画法を用い，要素レベルでの応力制約のもと，断面積および節点座標の関数で表される目的関数（トラス構造物の重量など）を最小に導くような解析学的な形状の決定法などもある．

本研究では，ラーメン構造物の幾何形状を決定するにあたり，これまで筆者等が研究を行ってきたトラス構造物の形状感度解析法を発展させ，節点座標を感度係数とするラーメン構造物の形状感度係数および形状感度係数特性を導いている．またシンプルな３部材ラーメンモデルを例に取り，変位の形状感度係数，節点座標，外力で表される目的関数（外力仕事）と制約条件を定めている．これらは線形結合式で表されるため，シンプレックス法により容易に最適形状を求めることが出来る．

2．節点座標を感度係数とする形状感度解析

部材数ｍのラーメン構造物における形状感度係数は，節点変位z_kを感度変数とし，節点座標X_hで偏微分

$$\frac{\partial z_k}{\partial X_h} = \sum_{i=1}^{m}\left\{\frac{\partial z}{\partial a_i}\frac{\partial a_i}{\partial X_h} + \frac{\partial z}{\partial b_i}\frac{\partial b_i}{\partial X_h} + \frac{\partial z}{\partial c_i}\frac{\partial c_i}{\partial X_h} + \frac{\partial z}{\partial d_i}\frac{\partial d_i}{\partial X_h} + \frac{\partial z}{\partial f_i}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial f_i}{\partial X_h}\right) + \frac{\partial z}{\partial g_i}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial g_i}{\partial X_h}\right) + \frac{\partial z}{\partial h_i}\left(\frac{1}{3}\frac{\partial h_i}{\partial X_h}\right) + \frac{\partial z}{\partial i_i}\left(\frac{1}{3}\frac{\partial i_i}{\partial X_h}\right) + \frac{\partial z}{\partial j_i}\left(\frac{1}{3}\frac{\partial j_i}{\partial X_h}\right)\right\} \quad (1)$$

した$\partial z_k/\partial X_h$で表される．ここで，独立変数$a_i$，$b_i$，$c_i$，$d_i$，$f_i$，$g_i$，$h_i$，$i_i$，$j_i$を中間変数として表すと次式となる．また，節点変位の形状感度係数特性は次式となる．

$$\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial z_k}{\partial X_h}X_h^{k+1} = \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial z_k}{\partial x_s}x_s^{k+1} + \frac{\partial z_k}{\partial y_s}y_s^{k+1} + \frac{\partial z_k}{\partial x_e}x_e^{k+1} + \frac{\partial z_k}{\partial y_e}y_e^{k+1}\right) = z_k^{k+1} \quad (2)$$

n：全自由度数

3．感度係数特性を用いた問題の定式化

任意の節点kに，静的な節点荷重P_kおよびモーメント荷重M_kが作用する場合の外力仕事Wは，感度変数を節点座標X_hとする推定式(3)で定式化される．

$$|W| = \left|\sum_{k=1}^{l}\left\{P_{Hk}\left(\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial z_{Hk}}{\partial X_h}X_h\right) + P_{Vk}\left(\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial z_{Vk}}{\partial X_h}X_h\right) + M_k\left(\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial z_{\theta k}}{\partial X_h}X_h\right)\right\}\right| \quad (3)$$

l：全節点数

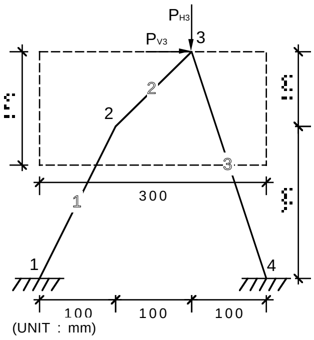
本研究では，以下の制約条件を満足し，目的関数(3)を最小に導くような節点座標を求める問題の定式化を行った．

$$\underline{X}_h \leqq X_h \leqq \overline{X}_h \quad (4)$$

式(4)の$\underline{X}_h$および$\overline{X}_h$は，感度変数の下限値および上限値である．ここで，式(3)は線形結合式であるため，目的関数(3)を最小に導く単一線形問題を解くことで，最大剛性を持つ最適形状を導くことが可能となる．また目的関数を外力仕事とすることにより，全断面力を考慮することになり，合理的な計算が可能となる．

4．３部材ラーメンモデルにおける解析例

Fig.1 に示すシンプルな３部材ラーメンモデルを例に，Table.1 に示すような２種類の荷重条件下で解析を行った．



許容節点移動範囲
Area : 0.36 cm^2
Moment of Inertia of Area
: 2.7 × 10^{-2} cm^4
Young ’ s modulus
: 2.0 × 10^7 N/ cm^2
Load State
P_{H3} : 50 N
P_{V3} : 50 N

Fig.1　３部材ラーメンモデル図および諸条件

Table.1　荷重条件

荷重条件1	節点3に水平荷重P_{V3}が作用した状態.
荷重条件2	節点3に水平荷重P_{H3}および鉛直荷重P_{V3}が作用した状態.

キーワード：幾何形状，形状感度解析，形状最適化，外力仕事

* 東洋大学 大学院工学研究科 構造システム研究室 〒350-0815 埼玉県川越市鯨井 2100　　TEL：0492-39-1391 FAX：0492-31-4482

Table.2　初期変位（荷重条件 1）

	u_2	v_2	θ_2	u_3	v_3	θ_3
Displacement (Initial)	-3.537E-03	1.704E-03	-4.601E-05	-1.287E-03	-5.965E-04	-1.993E-04

[Unit : u and v are ‘ cm ’, θ is ‘ rad. ’]

Table.3　変位の形状感度係数（荷重条件 1）

z_k	u_2	v_2	θ_2	u_3	v_3	θ_3
$\partial z_k/\partial x_1$	-5.487E-04	9.948E-05	2.341E-06	-3.385E-04	-1.109E-04	-1.738E-05
$\partial z_k/\partial y_1$	3.686E-04	-9.367E-05	6.508E-06	2.070E-04	6.797E-05	1.131E-05
$\partial z_k/\partial x_2$	1.074E-03	-3.640E-04	-4.281E-06	7.037E-04	2.354E-04	3.681E-05
$\partial z_k/\partial y_2$	-7.986E-04	3.105E-04	-1.412E-05	-5.327E-04	-1.793E-04	-3.022E-05
$\partial z_k/\partial x_3$	-2.906E-04	1.516E-04	6.230E-06	-3.032E-04	-6.126E-05	-3.197E-06
$\partial z_k/\partial y_3$	4.850E-04	-2.428E-04	9.442E-06	3.418E-04	1.253E-04	1.960E-05
$\partial z_k/\partial x_4$	-2.347E-04	1.129E-04	-4.290E-06	-6.201E-05	-6.328E-05	-1.623E-05
$\partial z_k/\partial y_4$	-5.493E-05	2.602E-05	-1.833E-06	-1.609E-05	-1.396E-05	-6.851E-07

Table.4　形状感度係数特性（荷重条件 1）

z_k	u_2	v_2	θ_2	u_3	v_3	θ_3
$\partial z_k/\partial x_1 \cdot x_1$	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00
$\partial z_k/\partial y_1 \cdot y_1$	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00
$\partial z_k/\partial x_2 \cdot x_2$	1.074E-02	-3.640E-03	-4.281E-05	7.037E-03	2.354E-03	3.681E-04
$\partial z_k/\partial y_2 \cdot y_2$	-1.597E-02	6.210E-03	-2.824E-04	-1.065E-02	-3.586E-03	-6.045E-04
$\partial z_k/\partial x_3 \cdot x_3$	-5.812E-03	3.031E-03	1.246E-04	-6.064E-03	-1.225E-03	-6.393E-05
$\partial z_k/\partial y_3 \cdot y_3$	1.455E-02	-7.285E-03	2.833E-04	1.025E-02	3.759E-03	5.880E-04
$\partial z_k/\partial x_4 \cdot x_4$	-7.042E-03	3.388E-03	-1.287E-04	-1.860E-03	-1.898E-03	-4.870E-04
$\partial z_k/\partial y_4 \cdot y_4$	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00
sum.	-3.537E-03	1.704E-03	-4.601E-05	-1.287E-03	-5.965E-04	-1.993E-04

節点変位の形状感度係数は，荷重による初期変位の関数であるため，荷重条件により変動する．ここでは，荷重条件 1 における，初期変位 Table.2 および，変位の形状感度係数 Table.3，感度係数特性値 Table.4 のみを示す．また，節点座標が変動した際の応答の推定を，FEM と感度係数特性を用いて求めた．荷重条件 1 において，y_3 座標を変化させた場合の節点 3 の推定鉛直変位を Fig.2 に，荷重条件 2 において x_3 座標を変化させた場合の節点 3 の推定水平変位を Fig.3 に示す．次に，定式化に基づいて求めた荷重条件 1 における最適形状を Fig.4 に，荷重条件 1 における最適形状を Fig.5 に示す．

5．結果および考察

解析の結果，本手法によるラーメン構造物の形状感度係数特性が確認された．感度係数特性値を用いた応答の推定では，初期節点付近において FEM による変位の推移に近似した傾向が認められたが，荷重条件次第では推定値の誤差が大きくなることがある．そのため，初めの解析で得られた最適形状を初期形状とし，再度本手法による形状最適化を行うことが望ましい．

また本研究で採用した制約条件に加え，隣接する節点との関係式を制約条件に導入することにより，さらに詳細な形状最適化が可能となる．現在，本研究を応用し，斜張橋の最適ケーブル添加形状の決定法に関する研究を行っている．

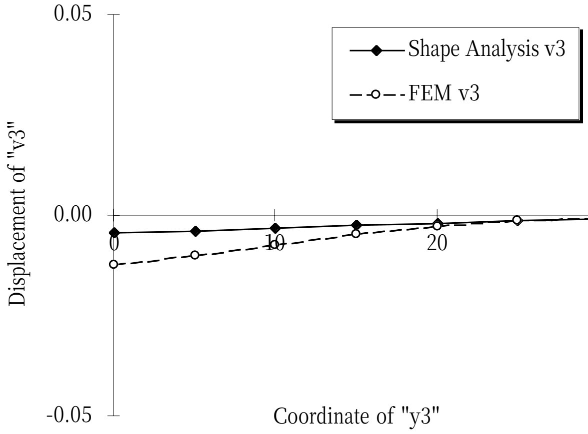


Fig.2　応答の推定値 u_3-x_3（荷重条件 1）

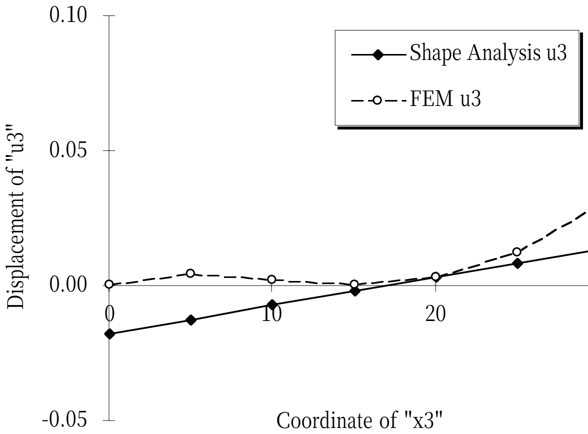


Fig.3　応答の推定値 v_3-y_3（荷重条件 2）

$W_0 = 2.982 \times 10^{-2}\ N \cdot \mathrm{cm}$　　$W_{OPT.} = 2.761 \times 10^{-7}\ N \cdot \mathrm{cm}$

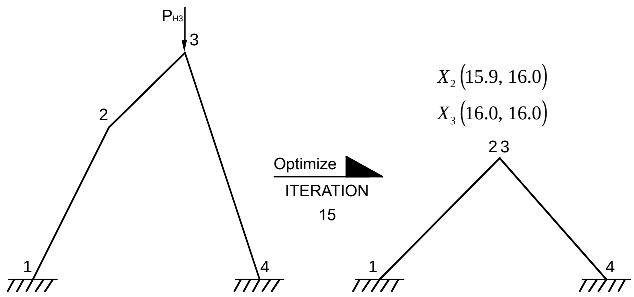


Fig.4　形状最適化による形状の変化（荷重条件 1）

$W_0 = 1.285 \times 10^{-1}\ N \cdot \mathrm{cm}$　　$W_{OPT.} = 7.401 \times 10^{-6}\ N \cdot \mathrm{cm}$

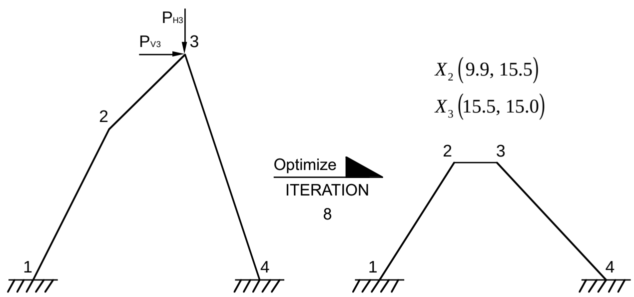


Fig.5　形状最適化による形状の変化（荷重条件 2）

参考文献：1）新延泰生，松井邦人，菊田従勇：骨組構造物の応答感度係の特性　土木学会論文集 No.450/I-20,pp75-83,1992
2）早川亘：トラス構造物における形状感度解析　東洋大学修士論文，1995 年 2 月
3）Uri Kirsch 著，山田善一，大久保禎二 監修：最適構造設計　- 概念・方法．応用 -　丸善，1983 年 10 月
4）木下栄蔵著：わかりやすい意志決定理論入門　近代科学社，1996 年 2 月