

骨組要素による微視構造解析の一定式化

宇都宮大学 ○学生員 大植 健 宇都宮大学 正 員 斉木 功
宇都宮大学 正 員 中島 章典 東北大学 正 員 寺田 賢二郎

1. はじめに

セル構造材料を対象として、微視的構造不安定による材料非線形のマルチスケールモデリングが試みられている^{1),2)}。

この非線形均質化法においては、マクロ解析の物性評価点ごとにミクロ解析が必要である上、そのミクロ問題が座屈等の不安定を含む現象であるため計算コストは莫大なものとなる。さらに、通常の均質化法では巨視構造が連続体であれば、その微視構造も連続体として定式化される。しかし、セル構造体の微視構造はセル壁と呼ばれる薄肉部材からなり、構造要素による解析が精度と効率の面から見て妥当である。

著者らは微視構造に骨組要素を適用したセル構造体のためのマルチスケール解析法の定式化を試みた³⁾が、変位場の不整合に起因する問題点が見いだされた。そこで本報告では、ミクロ解析の自由度に、一様変形に起因する変位と周期変形との和である全変位を用いることによって、前述の問題に対する解決を試みる。

2. 解析手法

$\varepsilon Y (\varepsilon \ll 1)$ の大きさを持つ微小なユニットセルで周期的に埋め尽くされている領域 Ω を解析対象とする。この微小なユニットセル内での尺度として、微視スケール $y_i = x_i/\varepsilon$ を導入する。これに対し、解析領域全体の尺度である x_i を巨視スケールと呼ぶこととする。均質化法における定式化⁴⁾により微視スケール、および巨視スケールの支配方程式がそれぞれ

$$\int_Y E_{ijkl} \frac{\partial \chi_k^{pq}}{\partial y_l} \frac{\partial v_i^1}{\partial y_j} dY = \int_Y E_{ijpq} \frac{\partial v_i^1}{\partial y_j} dY \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{E}^H \frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{v}^0}{\partial \mathbf{x}} d\Omega \\ = \int_{\Omega} \frac{1}{|Y|} \int_Y \mathbf{f} dY \mathbf{v}^0 d\Omega + \int_{\partial\Omega} \mathbf{t} \mathbf{v}^0 dS \end{aligned} \quad (2)$$

と得られる。ここに、 u は変位、 v は u の変分を表し、 χ は特性関数と呼ばれ、単位の巨視ひずみに対する微視構造の変位を表す。 $\mathbf{E}^H$ は均質化材料定数であり、次式で定義される。

$$E_{ijkl}^H = \frac{1}{|Y|} \int_Y \sigma_{ij}^{kl} dY \quad (3)$$

ここに、 σ_{ij}^{kl} は巨視ひずみの kl 成分に対する全応力成分を表す。



図-1 周期境界

文献³⁾では、骨組モデルを導入する際には特性関数 χ に対して、骨組の変位場を導入することで定式化を行った。しかし、特性関数、あるいは微視スケール変位そのものは物理量を直接的には表さないため、仮定する骨組の変位場との不整合から、算定される均質化定数が2ないし4倍程度、過大に評価されるなどの問題が見いだされた。

そこで、本報告では物理量を直接的に表す全変位に骨組の変位場を導入する。ここで、全変位 $\mathbf{w}$ とは、巨視ひずみによる一様変形に起因する変位 $\tilde{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{y}$ と微視スケールの周期変位 $\mathbf{u}^1$ により $\mathbf{w} = \tilde{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{u}^1$ と定義される。ここに、 $\tilde{\mathbf{H}} = \partial \mathbf{u}^0 / \partial \mathbf{x}$ である。よって、微視構造の全ひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ は

$$\boldsymbol{\varepsilon}^0 = \text{sym} \left(\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{y}} \right) = \text{sym} \left(\tilde{\mathbf{H}} + \frac{\partial \mathbf{u}^1}{\partial \mathbf{y}} \right) \quad (4)$$

となる。ここに、 $\text{Sym}(\cdot)$ は $\cdot$ の対称成分を取り出す演算子である。すべての単位巨視ひずみ成分に相当する微視構造の全ひずみから、応力を算定すれば、その体積平均より、式(3)のように均質化材料定数を得ることができる。微視構造の全変位に対して、梁の変位場を適用するには、微視構造解析において全変位 $\mathbf{w}$ を解析自由度とすればよい。そのために、周期境界条件を考慮する節点間に一様変形 $\tilde{\mathbf{H}}$ による相対変位 $\hat{u}_i^{pq} = \delta_{pi} \delta_{qj} (y_j^m - y_j^s)$ を与える。ここに、 p, q は巨視ひずみの成分、 y_j は節点座標を表し、上付きの m, s は周期境界を考慮する節点であり、図-1における独立節点、従属節点に対応する。したがって、独立節点の変位 $\mathbf{u}^m$ とそれに従属な節点の変位 $\mathbf{u}^s$ には以下の関係

$$\mathbf{u}^m = \mathbf{u}^s + \hat{\mathbf{u}} \quad (5)$$

が成り立つ。これらの条件によって得られる変位に対する平均応力が均質化材料定数と等価となる。

Key Words: 均質化法, セル構造体, 骨組構造, マルチスケール解析

〒321-8585 宇都宮市陽東7-1-2 宇都宮大学工学部建設学科 Tel.028-689-6208 Fax.028-689-6230

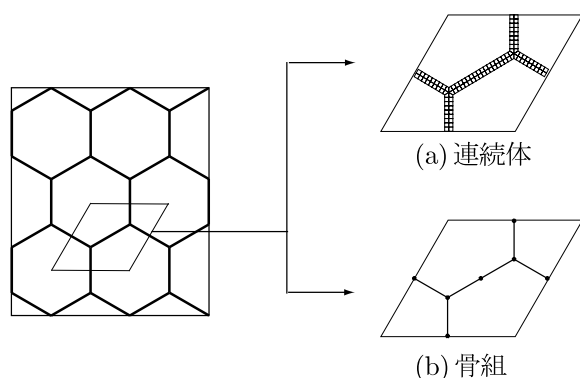


図-2 解析モデル

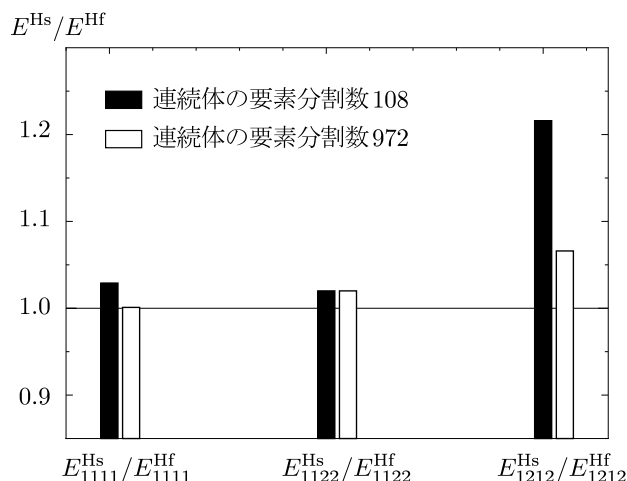


図-3 骨組モデルと連続体モデルの比較

3. 解析例の結果および比較

図-2に示す正六角形セル構造体を解析対象とする。隣り合うセルの中心を頂点とする平行四辺形を基本周期構造とし、ユニットセルとする。(a)は従来の連続体で、モデル化したものであり、要素分割は4節点四辺形アイソパラメトリック要素を108要素と978要素の二つのモデルを対象とした。(b)の骨組モデルは1節点3自由度の2節点梁要素を6要素とした。セル壁の弾性係数は $E_s = 1$ とし、ポアソン比は0としている。

このときの結果を図-3に示す。縦軸に連続体モデルでの均質化材料定数を骨組モデルの均質化材料定数で無次元化した値、横軸に均質化材料定数の各成分を取っている。黒の塗りつぶしが連続体モデルにおいて要素分割数を108とした時のものであり、白抜きは要素分割数をその9倍の972とした時のものである。この結果から連続体モデル108要素と骨組モデルにおいては軸方向成分で約3%、せん断成分においては約20%程、両者の値に違いが生じた。この原因として、連続体モデルでの要素分割数が足りないためシェアロッキングが生じ、剛性が高く得られていることが考えられる。そこで、連続体モデルにおける要素分割数を9倍にし、972要素

と骨組モデルとの比較を行うと、軸方向成分で約2%、せん断成分で約6%の差となった。この結果から連続体モデルの要素分割数を増やすと、得られる均質化材料定数は骨組モデルのものに漸近していくことが判る。

次に結果の検討として、Gibsonにより与えられた1軸変形時のハニカムの面内特性の解析解⁵⁾を用いて比較を行う。この解析解は一つのセルにある軸方向から一定の応力 σ_i が作用している状態を考える。指標の i は応力の方向を意味する。この時、応力 σ_i と直交する $x_j (j \neq i)$ 軸方向の応力 σ_j は0と仮定する。算定方法は文献に詳しいので省略し、結果のみを示す。セル壁の弾性係数を $E_s = 1$ 、幅と長さの比を1:9とすると正六角形セルの弾性係数は $E_1^* = E_2^* = 2.998 \times 10^{-3}$ となる。この解析解は x_j 方向の応力を0として算出した x_i 方向の弾性係数であるため、均質化材料定数を用いて等価な弾性係数を算出する必要がある。その算定式を E_1^{H*} についてのみ示すと

$$E_1^{H*} = E_{1111}^H - \frac{E_{1122}^H E_{2211}^H}{E_{2222}^H} \quad (6)$$

となる。

式(6)を用いて連続体モデルで要素分割数を972とした時の弾性係数を計算すると $E_1^{H*} = 3.092 \times 10^{-3}$ となる。この時の解析解との誤差は約3%ほどで、非常に解析解と近い値を示した。

次に骨組モデルによる解析解と等価な弾性係数は $E_1^{H*} = 2.900 \times 10^{-3}$ となる。この値と解析解との誤差は約3%となった。この時、骨組モデルでは弾性係数が解析解よりも低く現れているが、骨組モデルにおいては解析解が軸剛性を評価していないためであると考えられる。

参考文献

- 1) 齊木功, 寺田賢二郎, 池田清宏: セル構造体のマルチスケール解析のための座屈を考慮した微視スケール問題に関する一考察, 応用力学論文集, Vol.2, pp.287-294, 1999.
- 2) 齊木功, 寺田賢二郎, 堀宗朗, 池田清宏: 巨視的材料不安定性のマルチスケールモデリングにおける微視的構造周期のブロック対角化法による同定, 応用力学論文集, Vol. 3, pp. 37-45, 2000.
- 3) 大植健, 齊木功, 中島章典, 寺田賢二郎: 骨組要素を用いたセル構造体のマルチスケールモデリング, 応用力学論文集, Vol.3, pp.185-192, 2000.
- 4) Sanchez-Palencia, E.: *Non-homogeneous Media and Vibration Theory*, Lecture Notes in Physics 127, Springer-Verlag, Berlin, 1980.
- 5) L. J. Gibson and M. F. Ashby: *Cellular solids*, CAMBRIDGE, 1997.