構造物のトポロジー最適設計における
イメージベースト解析モデルに関する考察

東北大学　学生員　○ 石橋 慶輝
東北大学　学生員　松井 和己
東北大学　正員　寺田 賢二郎
(株) 豊田中央研究所　西脇 眞二

1.　はじめに

連続体構造物のトポロジーを決定する最適化手法は，Bendsøe and Kikuchi[1]によって設計領域を包含する拡張領域の材料配置問題として定式化されて以来，近年目覚ましい発展を遂げている．線形弾性体からなる構造物に対しては，すでに実用的にも広く受け入れられているが，最適構造内に残存する中間密度の要素 (グレースケール)，チェッカーボード状の密度分布の発生をはじめとする未解決の問題が残されている．

そこで本研究では，均質化法によるトポロジー最適設計手法が画像情報を利用したモデルを利用することを踏まえ，様々なケーススタディを行うことによって，その原因とメカニズムの解明を試みた．更に，トポロジー最適設計法において解析プロセスを担当するイメージベースト有限要素法の信頼性を議論するとともに，形状モデリングの改良を目的としたトポロジー最適設計法を提案する．

2.　均質化法によるトポロジー最適設計[1]

均質化法によるトポロジー最適設計法では，**図–1** に示すように，設計領域全体に無限小のサイズの孔をもつミクロ構造を分布させ，その孔の大きさ a, b を設計変数とすることによって問題を材料配置問題に置き換える．ミクロ構造の孔の大きさを設計変数にとることにより，均質化法によって材料特性を設計変数で表すことになる．

ある一定の体積制限 $\overline{\Omega}_s$ のもとで剛性の最大化を考えたとき，最適化問題は次式の通りとなる．

$$\begin{array}{lll} \underset{a,b,\theta}{\text{Maximize}} & \underset{\boldsymbol{v}\in\mathcal{V}}{\text{Minimize}} & F(\boldsymbol{v}) \\ & \text{subject to} & \Omega_s = \int_\Omega \{1-(1-a)(1-b)\}\,\mathrm{d}\Omega \le \overline{\Omega}_s \\ & & 0 \le a \le 1 \\ & & 0 \le b \le 1 \\ & & 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \end{array} \qquad \cdots\cdots (1)$$

ここで，$F(\boldsymbol{v})$ は線形弾性体からなる設計対象構造物の全ポテンシャルエネルギー，Ω_s はマクロ構造全体の体積，$\overline{\Omega}_s$ は設計対象の体積の制約値，$a, b\ (0 \le a, b \le 1)$ はマクロ材料特性を与えるためのミクロ構造ユニットセルの穴の大きさである．また，ユニットセルの角度 θ も考慮する．この最適化問題では，Lagrangian を以下のように定義し，

$$\mathcal{L} = F(\boldsymbol{u}) - \Lambda\left(\int_\Omega \{1-(1-a)(1-b)\}d\Omega - \Omega_s\right) - \int_\Omega \{\lambda_{a0}(-a) + \lambda_{a1}(a-1)\}d\Omega - \int_\Omega \{\lambda_{b0}(-b) + \lambda_{b1}(b-1)\}d\Omega \quad \cdots (2)$$

この停留条件

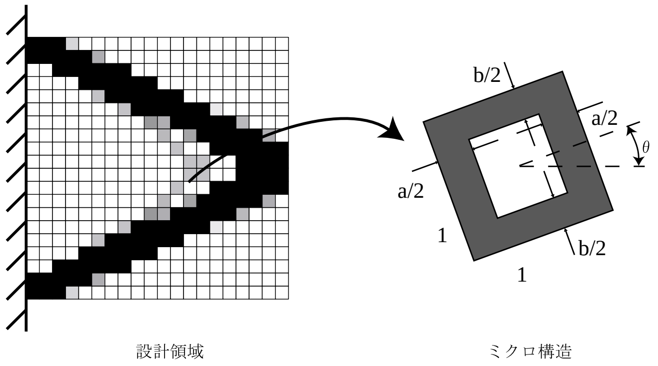
$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial a} & = & \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})^T \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial a}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) - u^T\dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial a} + \Lambda(b-1) + \lambda_{a0} - \lambda_{a1} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial b} & = & \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})^T \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial b}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) - u^T\dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial b} + \Lambda(a-1) + \lambda_{b0} - \lambda_{b1} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} & = & \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})^T \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial \theta}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) = 0 \end{array}\right. \qquad \cdots\cdots (3)$$

を考える．ここで，$\Lambda,\ \lambda_{a0},\ \lambda_{a1},\ \lambda_{b0},\ \lambda_{b1}\ (\Lambda, \lambda_{a0}, \lambda_{a1}, \lambda_{b0}, \lambda_{b1} \le 0)$ は Lagrange 未定乗数である．この最適条件から設計変数の更新方法が得られ，最適化の繰り返し計算の中で設計変数を更新することにより材料の最適配置が得られ，その密度分布によって最適構造が同定される．

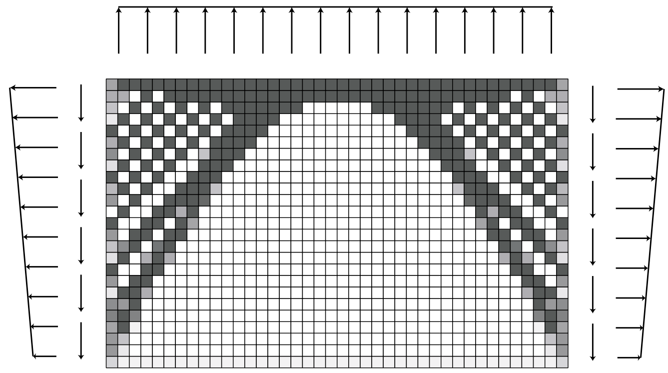
3.　トポロジー最適設計例とその力学的考察

トポロジー最適設計によって得られた最適構造の例を**図–2** に示す．この最適構造をみると，グレーの有限要素，つまり中間密度の要素がある．これは俗に「グレースケール」と呼ばれており，問題視されている曖昧性である．また，中実要素と空隙要素がチェッカーボードのように交互に並んだ部材が存在し，構造物としての体を成していない．これは「チェッカーボード」と呼ばれ，トポロジー最適化の失敗例としてしばしば例示されるものである．これらは，いずれも実際にどのように構造物の境界を定めるべきかを判断しにくくするため，トポロジー最適設計を実用化するためには解決しなければならない問題点として指摘されている．また，一般的には四角形有限要素を形状表現の単位としているため，水平，垂直方向以外の部材の境界を滑らかに表現することができない (**図–3**)．そこで本研究では，種々のケーススタディを行うことにより，これらの問題点の解決に取り組んだ．

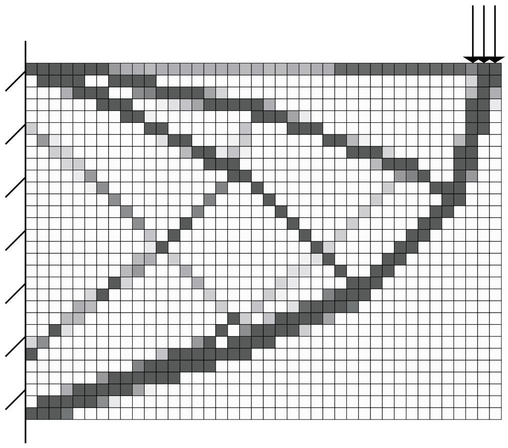
〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉06
Key Words: *Topology optimization , Image-based modeling*



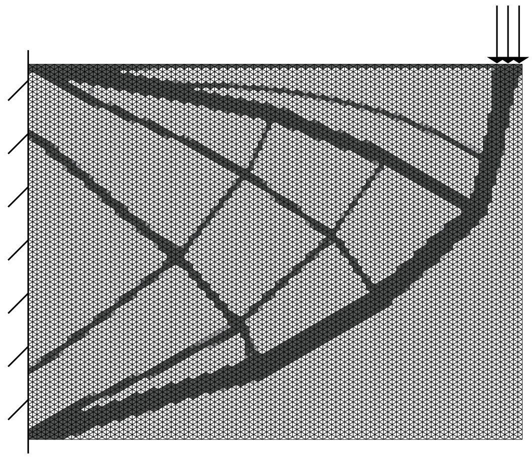
図–1 均質化法によるトポロジー最適化



図–2 最適構造例



図–3 四辺形要素を用いた設計モデルから得られた最適構造



図–4 高次の要素を用いた設計モデルから得られた最適構造

その結果，グレースケールの発生を回避するには，設計モデルの有限要素数を多くすることが力学的に矛盾を含まない有効な対策であることがわかった．有限要素数の多い設計モデル，つまり自由度の高い設計モデルでは最適構造に近い構造が得られる．これに対して，有限要素数の少ないモデル，つまり自由度の低い設計モデルではメカニズム的に等価な最適構造を形作るために中間密度の要素に頼らざるを得ないため，グレースケールが現れることがわかった．

また，詳細は割愛するが，領域に一様な応力が分布し，有限要素一つについてせん断力が支配的になる場合，材料を配置する場所の判断基準がアルゴリズムに組み込まれていないため，チェッカーボード状の密度分布が生成されることがわかった．

更に，高次の三角形要素を用いて設計モデルを作成することにより，形状近似の自由度を高くするとともに，局所的な変形性能を向上させ，滑らかな境界近似を得た (**図–4**)．

4.　結論

本研究では，解決が急がれているいくつかの問題点について，種々のケーススタディを行うことにより，その原因とメカニズムを解明した．その結果，これまで未解明であったグレースケールの力学的役割と最適解への影響，及びチェッカーボード状の密度分布の生成機構を力学的視点から明らかにすることができた．更に，設計領域における有限要素の配置について考察を行い，最適構造の形態は設計モデルの自由度に依存することを明らかにした．また，トポロジー最適設計法において解析プロセスを担当するイメージベースト有限要素法の信頼性[2)]について検証を行い，非線形問題へ拡張する上で，構造解析の精度上の信頼性にはほぼ問題ないことを確認した．これらの結果をもとに，設計モデルの自由度を上げ，形状モデリングを改良するために，高次の三角形要素を用いたトポロジー最適設計法を提案した．

本研究で得られた知見により，この研究分野において軽視されてきた力学的視点の重要性を認識することができる．今後，非線形問題への拡張を行うためには，本研究の成果を踏まえ，より力学的な信頼性の高い最適化手法の開発が期待される．

参考文献

1) Bendsøe,M.P. and Kikuchi,N.: Generating Optimal Topologies in Structural Design using a Homogenization Method, *Comput. Meths. in Appl. Mech. and Engrg.*, Vol.71, pp.197-224, 1988.
2) K.Terada , T.Miura and N.Kikuchi, Digital image-based modeling applied to the homogenization analysis of composite materials, *Computational Mechanics*, Vol.20, pp.331-346, 1997.