平面応力問題の EFGM 解析

足利工業大学大学院　学生会員○内田伸一郎
足利工業大学　正 会 員　末武　義崇
足利工業大学大学院　学生会員　石山竜太郎

１．はじめに

要素分割を必要としない新しい数値解析法として、エレメントフリー法（EFGM）は多くの研究報告がなされている。筆者らは、Lagrange の多項式を変位関数として用い、比較的簡明な EFGM を構築するとともに、実際に梁や薄板の有限変位解析に適用し、その妥当性や有用性を示してきた。

本研究では、Lagrange の多項式に基づく EFGM に関する解析例の蓄積を目的とし、二次元問題の解析への適用と、既往文献の解析解[1)] および FEM による数値解との比較検討を実施した。

２．エレメントフリー法の定式化

本研究では、格子状の節点配置を想定し、評価点(x,y)を中心とした矩形のサポート領域を設定して考える。評価点近傍の x，y 方向変位 u(x,y)、v(x,y)は、サポート領域内部の$(N+1)^2$個の節点変位 u_{ij}、$v_{ij}(i,j=0\sim N)$によって、次式のような Lagrange 多項式で表現することができる。

$$u(x,y)=\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}u_{ij}\varphi_i(x)\psi_j(y) \qquad v(x,y)=\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}v_{ij}\varphi_i(x)\psi_j(y) \qquad (１)$$

ここで、$\varphi_i(x)$ および $\psi_j(y)$ は Lagrange 基底であり、$\varphi_i(x_m)=\delta_{im}$,$\psi_j(y_n)=\delta_{jn}$　となる性質を満たす。ここでは式(1)を用いて、評価点(x,y)における変位およびその偏導関数を計算し、それらの離散表示を求めることになる。例えば変位 u については次の離散表示が得られる。

$$u(x,y)=\mathbf{B}_0^T(x,y)\mathbf{u} \qquad \partial u/\partial x=\mathbf{B}_1^T(x,y)\mathbf{u} \qquad \partial u/\partial y=\mathbf{B}_2^T(x,y)\mathbf{u} \qquad (２)$$

ここに $\mathbf{B}_0$ 、$\mathbf{B}_1$ および $\mathbf{B}_2$ は Lagrange 基底およびその微分からなる係数ベクトル、**u** は節点変位ベクトルである。なお、$\mathbf{B}_0$ 、$\mathbf{B}_1$ および $\mathbf{B}_2$ のマトリックス表示は以下の通りである。

$$\mathbf{B}_0^T=\lfloor \varphi_0(x)\psi_0(y)\cdots\varphi_N(x)\psi_N(y)\rfloor \quad \mathbf{B}_1^T=\lfloor \varphi'_0(x)\psi_0(x)\cdots\varphi'_N(x)\psi_N(y)\rfloor \quad \mathbf{B}_2^T=\lfloor \varphi_0(y)\psi'_0(y)\cdots\varphi_N(x)\psi'_N(y)\rfloor$$

３．解析モデル

本研究では、図１に示すような、等分布荷重を受ける両端単純支持の梁を対象とし、平面応力場を仮定した二次元問題として解析を行った。

数値計算を行うにあたり、梁の高さを h＝1[m]、荷重 q＝9.8×10^4[Pa]、Young 率 E＝2.058×10^5[MPa]、Poisson 比ν＝0.3 とした。また、EFGM の解析モデルについては、総節点数を 11×11＝121、数値積分公式として用いた Gauss 積分の次数を 5 とし、数値積分を適用する小領域セルの総数を 5×5＝25 とした。FEM 解析に際しては、汎用解析プログラム MARC を使用し、総節点数を EFGM のモデルと同等とするため、要素分割数を 10×10＝100、要素タイプを 4 節点平面応力要素とした。節点配置については、EFGM、FEM ともに図１に示した通りである。なお、変化させたパラメータを表１に示す。

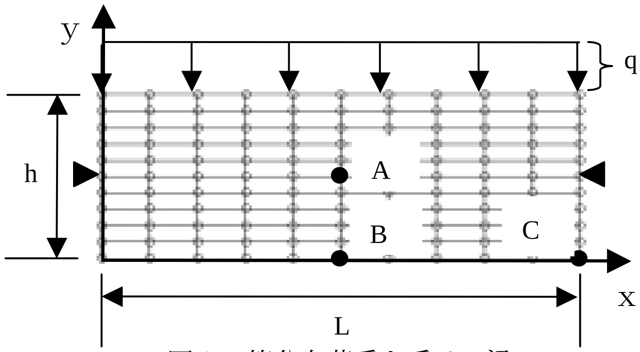

図１　等分布荷重を受ける梁

表１　各種パラメータの値

解析方法	ＥＦＧＭ	ＦＥＭ
梁の全長（m）	1.0～20.0	
サポートパラメータ	0.6～6.6	―

キーワード：エレメントフリー法，Lagrange 多項式，平面応力問題，線形解析

〒326-8558　栃木県足利市大前町 268-1　足利工業大学大学院　TEL：0284-62-0605　FAX：0284-64-1061

４．解析結果および考察

解析結果を図２、３および４に示す。図はいずれも横軸に縦横比ｈ/L を、縦軸に EFGM 解析および FEM 解析の誤差をそれぞれとって図示したものである。解析誤差εについては、Timoshenko の解析解[1)] を基準とし次式で定義する。

$$\varepsilon = \left| S - S_T \right| / \left| S_T \right| \times 100 \quad [\%] \qquad (3)$$

ここで、S は EFGM あるいは FEM による数値解、S_T は解析解[1)] をそれぞれ表わしている。図１で示した３点 A・B・C については、点 A においては y 方向変位 v の結果を、点 B においては x 方向垂直応力σ_xの結果を、点Ｃにおいては x 方向変位 u に関する結果をそれぞれ求め、EFGM と FEM との比較結果を図２、３および４に示した。

図２～４に示した結果を総合すると、全体的に EFGM 解析の方が FEM 解析に比べ、より良好な数値解を与えていることがわかる。点Ａの y 方向変位 v に着目すると、図２からも明らかなように、縦横比 h/L の増大に伴って、すなわちモデルの形状が梁から板に近づくにつれて、両者の誤差も近づく傾向にあるものの、EFGM の誤差は常時１%未満の範囲にとどまっていることがわかる。図３を見ると、点 B の x 方向垂直応力σ_xは、FEM による解析誤差が縦横比の値に依らずほぼ２%で一定であるのに対し、EFGM の場合、縦横比の相違による誤差の変化が認められる。図４には、点Ｃの x 方向変位 u に関する比較結果を示したが、縦横比ｈ/L の小さい範囲では EFGM が良好な近似解を与えているのに対し、縦横比 h/L が 0.15 以上を越えると FEM より大きな誤差を生ずる結果が得られた。

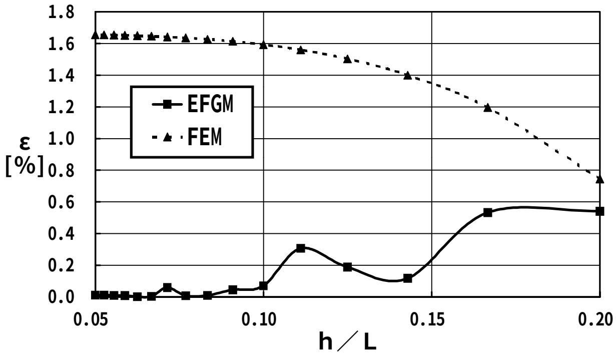

図２　点 A における変位ｖの誤差

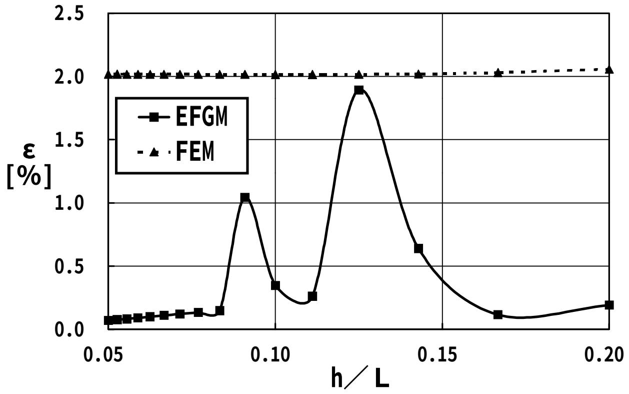

図３　点 B における応力σ_xの誤差

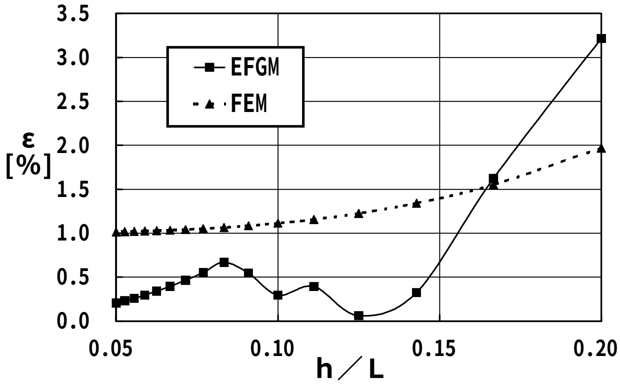

図４　点Ｃにおける変位ｕの誤差

図５および６は、EFGM および FEM によって得られたモデル全体の変形形状を表したもので、いずれも梁の全長 L＝5[m]の場合の結果である。図５および６に示した解析結果を比較すると、同一の荷重レベルにおいては、EFGM の解析結果の方が全体的に大きな変形形状を示していることがわかる。

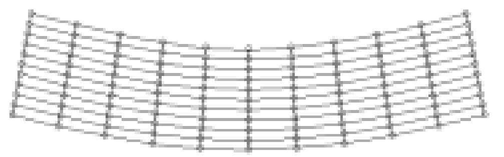

図５　L＝５[m]の EFGM 解析結果

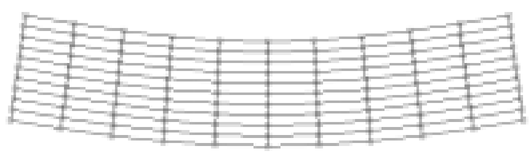

図６　L＝５[m]の FEM 解析結果

５．まとめ

本研究では、Lagrange の多項式に基づく EFGM を、簡単な二次元問題の解析に適用し、FEM との比較を行った。解析結果から FEM と遜色のない良好な数値解を得ることができた。今後の課題として、EFGM で任意の節点配置による対応する EFGM の定式化を検討する予定である。

【参考文献】 1)S.P.Timoshenko et al; THEORY OF ELASTICITY,Third Edition,McGraw Hill,1970.