

Differential Quadrature 法を用いた変厚木板の振動解析

大同工業大学大学院 学生員 ○ 滝沢宣人

大同工業大学 都市環境デザイン学科 正員 近藤八重 正員 水澤富作

1. はじめに 異方性の大きな木材は、木構造物や木製楽器に用いられている。変断面を有する木板や木質板の振動問題は、曲げ剛性も座標の関数を含むので複雑な偏微分方程式になる。最近、Bellman らにより提案された Differential Quadrature 法(DQ 法)は、偏微分方程式を数値的に解く手法として、広い分野で用いられている¹⁾。著者らは半解析的な DQ 法の等方性な薄板や Mindlin 板の振動解析への適用について検討し、その数値安定性について検討している²⁾。さらに、複雑な偏微分方程式で表される異方性の大きな木製変厚板に適用し、本手法の有用性を示す必要があると思われる。

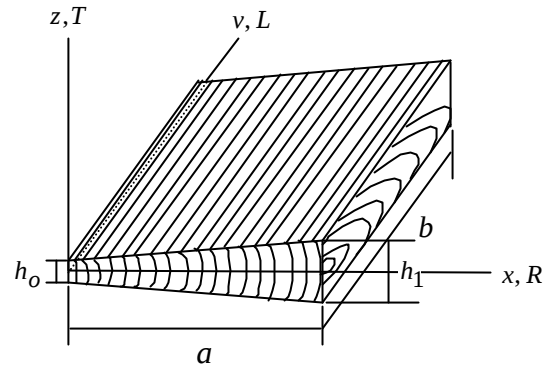


図 - 1 変厚板と座標系

本文では、図 - 1 に示す一方向に変厚な木板の振動解析への DQ 法の適用について検討を行い、本手法の収束性と精度について示し、また変厚木板の振動特性について検討を行っている。

2. 解析手法 直交異方性弾性理論と薄板理論に基づく一方向に変厚な木板の自由振動方程式は、無次元直交座標系と異方性曲げ剛性を用いて次式で与えられる³⁾。

$$H(x)^2 \partial^4 w / \partial x^4 + H(x)^2 (E_y / E_x) (a/b)^4 \partial^4 w / \partial h^4 + 2ZH(x)^2 (a/b)^2 \partial^4 w / \partial x^2 \partial h^2 + (2/H(x)) (\partial H(x)^3 / \partial x) Z (a/b)^2 \partial^3 w / \partial x \partial h^2 + 2(1/H(x)) (\partial H(x)^3 / \partial x) \partial^3 w / \partial x^3 + (1/H(x)) (\partial H(x)^3 / \partial x) \partial^3 (E_y / E_x) \partial^2 w / \partial x^2 + n_{yx} (1/H(x)) (\partial^2 H(x)^3 / \partial x^2) (a/b)^2 \partial^2 w / \partial h^2 = (\rho h_0 \omega^2 a^4 / D_x^0) w \quad (1)$$

ここで $x = x/a$, $h = y/b$, $D_x = E_x h^3 / 12(1 - n_{xy} n_{yx})$, $D_y = E_y h^3 / 12(1 - n_{xy} n_{yx})$, $D_1 = n_{yx} D_x = n_{xy} D_y$, $D_{xy} = G_{xy} h^3 / 12$, であり, ρ は密度, ω は円振動数(rad/s)である。また, $Z = \{n_{yx} + 2(1 - n_{xy} n_{yx})(G_{xy} / E_x)\}$, $D_x^0 = E_x h_0^3 / 12(1 - n_{xy} n_{yx})$ 。式(1)の $H(x)$ は板厚の変断面形状を表す式であり、凸断面と凹断面では、それぞれ次式で定義される。

$$(i) \text{ 凸断面: } h(x) = h_0 [d - (d-1)(1-x)^n] = h_0 H(x) \quad (2), \quad (ii) \text{ 凹断面: } h(x) = h_0 [1 - (1-d)x^n] = h_0 H(x) \quad (3)$$

ここで, $d = h_1 / h_0$ は変厚比であり、また変厚断面を n 次の多項式で仮定している。

また、DQ法では、次式で表される関数 $W(x)$ の離散点 i での r 階の導関数は、図 - 1 に示す解析領域に設けた全ての離散点での関数値の重み付き線形和で表される。 $d^{(r)} W(x) / dx^r = \sum_{j=1}^N A_{ij}^{(r)} W_j$; $j, i = 1, 2, \dots, N$ (4)

ここで, $A_{ij}^{(r)}$ は r 階の導関数の重み係数行列であり, N は x 軸方向に設けられた離散点の数である^{2, 3)}。

次に, x - 軸に平行な 2 辺が単純支持されていると仮定する。Levy 法を適用すれば、たわみ w は次式で表すことができる。

$$w = \sum W(x) \sin mpy \quad (5)$$

したがって、式(5)を式(1)に代入して、これを DQ 表示すると、次式のように表される。

$$\sum_{j=1}^N A_{ij}^{(4)} W_j H(x_i)^2 + 2 \sum_{j=1}^N A_{ij}^{(3)} W_j (1/H(x_i)) (\partial H(x_i)^3 / \partial x) + \sum_{j=1}^N A_{ij}^{(2)} W_j \left[(E_y / E_x) (1/H(x_i)) (\partial^2 H(x_i)^3 / \partial x^2) - 2Z(a/b)^2 (mp)^2 H(x_i)^2 \right] + \sum_{j=1}^N A_{ij}^{(1)} W_j \left[-2Z(1/H(x_i)) (\partial H(x_i)^3 / \partial x) (a/b)^2 (mp)^2 H(x_i)^2 \right] + W_i \left[(E_y / E_x) (a/b)^4 (mp)^4 H(x_i)^2 - n_{yx} (1/H(x_i)) (\partial^2 H(x_i)^3 / \partial x^2) (a/b)^2 (mp)^2 H(x_i)^2 \right] = n_{*}^2 W_i \quad ; i = 3, 4, \dots, N-2, \quad (6)$$

ただし, $n_{*} = \omega a^2 \sqrt{\rho h_0 / D_x^0}$ である。同様に, y - 軸に平行な 2 辺の境界条件も DQ 法を用いて定式化でき、変厚板の振動方程式 ($N-4$ の方程式) と境界条件式 (4 つの方程式) から成る固有方程式が求められる。

キーワード: 変厚, 木板, 振動解析, DQ 法

〒457 - 8532 名古屋市南区白水町 4 0 番地

TEL. 052 - 612 - 5571

FAX. 052 - 612 - 5953

3. 数値計算例および考察

ここでは、半解析的な DQ 法を用いて、表 - 1 に示す異方性の大きな木質合板や柱目板の振動解析を行い、その振動特性について示す。y 軸に平行な 2 辺の境界条件は、C - F、S - C などで表し、 $x = 0$ で固定 C または単純支持辺 S、 $x = a$ で自由 F または固定辺を示す。また、重み係数行列を求めるために必要になる離散点は Chebyshev の直交多項式の零点を座標に用いている。

表 - 2 は、板厚が直線的に変化する正方形メイプル合板の振動数パラメータ $n^* = \omega a^2 \sqrt{\rho h_0 / D_X^0}$ の収束性に与える離散点の数と精度比較を示している。比較のために、Lal らのスプライン関数法⁴⁾による結果とスプライン要素法を用いて求めた値⁵⁾が示してある。これより、本手法の安定した収束性が示されており、また他の数値解析法による値と良く一致した結果が得られている。

図 - 2 には、一方向に凹断面な板厚を有すスプルース柱目板の

基本振動数パラメータ n^* に与える辺長比 a/b と変断面性状の影響が示してある。ここで、 $h_1/h_0 = 2.0$ ，凹断面の多項式の次数 n は 1 次から 3 次まで変化させている。これより n^* は辺長比の増大に従い、指数関数的に増大している。また、多項式の次数の影響は、辺長比が大きいほど顕著に見られる。

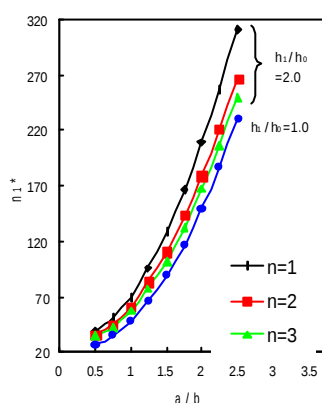


図-2 スプルース柱目板の n^* に与える a/b と n の影響; C-C

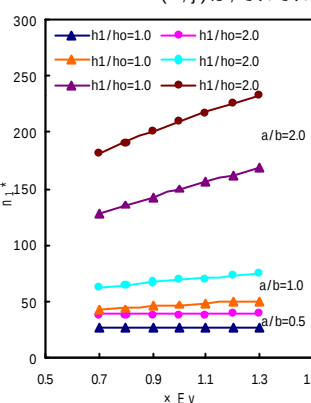


図-3 スプルース柱目板の n^* に与える E_y の変動の影響; C-C

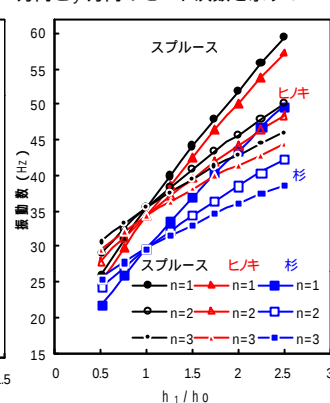


図-4 3 種の木材の基本振動数 (Hz) に与える h_1/h_0 と n の影響; $a/b=1.0$, $b=100\text{cm}$, C-C

一方、木板の弾性係数は、含水比や湿度により、20%程度変動することが知られている。図 - 3 には、スプルース柱目板の振動数パラメータに与えるヤング係数 E_y の変動と変厚比などの影響が示してある。ここで、 a/b は 0.5、1.0、2.0 にとり、 h_1/h_0 は 1.0 と 2.0 に仮定している。これより、 n^* に与える E_y の変動の影響は、辺長比が大きいほど顕著に見られ、また変厚比が大きいほど、 E_y の変動の影響が大きく現れる。

図 - 4 は、スプルース、ヒノキと杉材の変厚正方形柱目板の基本振動数(Hz)に与える h_1/h_0 と、凹断面の多項式の次数 n の影響を示している。ここで、 b は 100cm と仮定し、 n は 1 次から 3 次まで変化させている。これより、基本振動数と変厚比の関係は、 n に関係なく、線形関係にある。また、基本振動数の大きさは、スプルース、ヒノキ、杉の順である。

4. まとめ

本文で得られた結果は、以下のようにまとめられる。1) スプルース柱目板の振動数パラメータ n^* に与える E_y の変動の影響は、辺長比が大きいほど顕著に見られ、また変厚比が大きいほど、 E_y の変動の影響が大きく現れる。2) n^* は辺長比の増大に従い、指数関数的に増大している。また、多項式の次数の影響は、辺長比が大きいほど顕著に見られる。3) 基本振動数と変厚比の関係は、 n に関係なく、線形関係にある。また、基本振動数の大きさは、スプルース、ヒノキ、杉の順になる。

参考文献 1) Bert, C.W. et al.; AMR, Vol.49, 1-28, 1996. 2) 近藤他: 応用力学論文集, Vol. 3, 2000. 3) 滝沢他: 土木学会中部支部研究発表概要集, 2001. 4) Lal, R. et. al, J. Sound Vibr, Vol. 207, pp. 1-13, 1997. 5) 近藤他: 楽器の構造を想定した木材の振動解析, 第 51 回日本木材学会大会講演要旨要集, 2001.

表 - 1 材料特性値

樹種	E_L	E_R	G_{LR}	ポアソン比 ν_L	密度 ρ
メイプル合板	42.18	131.5	11.18	0.12	
スプルース	118.0	9.2	7.7	0.37	0.34
杉	75.00	6	6.5	0.40	0.33
ヒノキ	134.0	10.4	10.1	0.43	0.43

表-2 変厚合板の振動数パラメータ n^* の収束性と精度比較; $a/b=1.0$, $h_1/h_0=1.5$

境界条件	1st (1,1)	2nd (2,1)	3rd (3,1)	4th (2,1)	5th (2,2)	6th (3,2)	7th (4,1)
C-C	30.06	43.05	72.93	77.53	87.69	111.5	118.3
	29.90	42.95	72.90	78.76	88.28	111.3	118.3
	29.89	42.95	72.88	78.56	88.15	111.3	118.2
	29.89	42.95	72.88	78.53	88.12	111.2	118.2
	29.89	42.95	72.88	78.53	88.12	111.2	118.2
	29.90	42.94	72.88	78.53	88.12	111.2	118.2
	29.89	42.95	72.88	78.53	88.12	111.2	118.2
	29.86	42.94	72.86	78.53	88.12	111.2	118.2
	29.89	42.95	72.87	78.53	88.12	111.2	118.2
	29.90	42.95	72.85	78.53	88.12	111.2	118.2
SEM	29.87	42.91	72.82	78.40	87.96	111.0	118.1
Lal	29.90	-	-	78.60	-	-	-

SEM は Spline 要素法を用いて求めた値⁵⁾

Lal はスプライン関数法により求めた値⁴⁾

(i, j) は、それぞれ x 方向と y 方向のモード次数を示す。