

粘弾性直交異方性 Mindlin 板の振動解析と損失正接について

大同工業大学 都市環境デザイン学科 正員 近藤八重 正員 水澤富作

1. はじめに 衝撃荷重を受ける木構造物や木製楽器の動的応答や音響特性は、木材の材料学的な異方性 ($E_L/E_R \cong 10, E_L/G_{RT} \cong 300$) を考慮すると同時に、木材の粘弾性による損失正接 ($\tan \delta = Q^{-1}$) も評価する必要がある¹⁾。定常振動を仮定した粘弾性ばりや粘弾性板の振動解析に用いられる使用材料の複素弾性率などは、実部に相当する材料の動的ヤング率、動的せん断弾性率、ポアソン比と同時に、虚部のこれらの物性値に対応した損失正接を実験的に求める必要があり、多くの実験結果が報告されている。周辺単純支持された粘弾性等方性板の振動解析は、早くから Srinivas ら²⁾ により研究されている。McIntyre ら³⁾ は、等方性薄板の内部摩擦に起因する損失正接の理論的な評価法を提案し、実験値と比較検討している。また、中尾ら¹⁾ は、McIntyre ら方法を薄板理論に基づく粘弾性異方性板の振動解析に適用し、木板の振動特性に与える損失正接の影響や実験値との比較を検討しているが、損失正接に与える横せん断変形の影響については十分検討されていない。

本文では、スプライン要素法を用いて、**図-1**に示す任意の境界条件を持つ粘弾性直交異方性 Mindlin 板の振動解析を行い、木板の損失正接 ($\tan \delta_P$) を求めるための評価法と振動特性に与える損失正接の影響について検討を行っている。

2. 式の定式化 直交異方性粘弾性論と Mindlin 板理論に基づくスプライン要素法⁴⁾を用いて式の定式化をする。ただし、以下に示す仮定を設けている。 内部摩擦による材料

の損失正接は小さい。 ポアソン比の損失正接は、十分小さいので無視する。 材料の物性値は、周波数に依存せず、一定であると仮定する。したがって、複素弾性率等は以下のように表される。

$$E_k^* = E_k + i \tan \delta_E E_k, G_{kl}^* = G_{kl} + i \tan \delta_G G_{kl} \quad (1)$$

ここで、 i は虚数であり、 $\tan \delta_E, \tan \delta_G$ は、それぞれ実験で求めた木材の動弾性係数 E_k と G_{kl} に対応する損失正接である。したがって、直交異方性 Mindlin 板の曲げ剛性 D_{ij} と減衰定数 Ω_{ij} は、次式で与えられる。

$$D_x = E_x h^3 / 12(1 - \nu_{xy} \nu_{yx}), D_y = E_y h^3 / 12(1 - \nu_{xy} \nu_{yx}), D_{xy} = D_x \nu_{yx} = D_y \nu_{xy}, D_{66} = G_{xy} h^3 / 12$$

$$\Omega_x = D_x \tan \delta_x, \Omega_y = D_y \tan \delta_y, \Omega_{xy} = D_{xy} (\tan \delta_x + \tan \delta_y) / 2, \Omega_{66} = D_{66} \tan \delta_{xy}, \Omega_{xz} = G_{xz} \tan \delta_{xz}, \Omega_{yz} = G_{yz} \tan \delta_{yz}$$

直交異方性 Mindlin 板のひずみエネルギー U と運動エネルギー T は、複素弾性率の実部の値を用いて、定式化される。したがって、全ポテンシャルエネルギー $\Pi = U - T$ をスプライン要素法を用いて離散化すれば、固有方程式が導かれるので、固有値計算により、振動数と固有モードが求められる。

次に、直交異方性 Mindlin 板の内部減衰による損失正接 $\tan \delta_p$ は、McIntyre らの微小減衰近似法⁴⁾ を適用すると、固有値解析から求めた固有モードを用いて複素弾性率の虚部の値から求められる内部減衰エネルギーと虚部の値から求めたエネルギーの比で定義され次式で表される。 $\tan \delta_p = (B/A) \cong \omega' / \omega$ (2)

$$B = \Omega_x (\alpha_1 / a^4) + \Omega_y (\alpha_2 / b^4) + \Omega_{xy} (\alpha_3 / a^2 b^2) + 4\Omega_{66} (\alpha_4 / a^2 b^2) + \kappa \Omega_{xz} h (\alpha_5 / a^2) + \kappa \Omega_{yz} h (\alpha_6 / b^2) \quad (3)$$

$$A = D_x (\alpha_1 / a^4) + D_y (\alpha_2 / b^4) + 2D_{xy} (\alpha_3 / a^2 b^2) + 4D_{66} (\alpha_4 / a^2 b^2) + \kappa G_{xz} h (\alpha_5 / a^2) + \kappa G_{yz} h (\alpha_6 / a^2 b^2) \quad (4)$$

ここで、 κ はせん断修正係数であり、5/6 に仮定している。また、 α_i は、それぞれ次式で定義される。

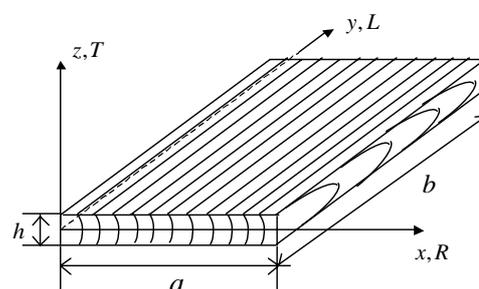


図-1 スプルス柱目板

キーワード：粘弾性異方性板、振動解析、損失正接

〒457-8532 名古屋市南区白水町40番地

TEL. 052-612-5571

FAX. 052-612-5953

$$\alpha_1 = \iint (\partial\phi_x/\partial x)^2 dx dy / \iint w^2 dx dy, \alpha_2 = \iint (\partial\phi_y/\partial y)^2 dx dy / \iint w^2 dx dy, \alpha_3 = \iint (\partial\phi_x/\partial x)(\partial\phi_y/\partial y) dx dy / \iint w^2 dx dy$$

$$\alpha_4 = \iint (\partial\phi_y/\partial x + \partial\phi_x/\partial y)^2 dx dy / \iint w^2 dx dy, \alpha_5 = \iint (\partial w/\partial x - \phi_x)^2 dx dy / \iint w^2 dx dy,$$

$$\alpha_6 = \iint (\partial w/\partial y - \phi_y)^2 dx dy / \iint w^2 dx dy \quad (5)$$

3. 数値計算例及び考察 ここでは、建材や楽器用材として用いられるトウヒ族のスプルス板の振動解析を行い、また振動解析結果から求まる損失正接の振動特性について示す。中尾ら¹⁾が実験で求めたスプルス材の物性値である複素弾性率などが、表-1に示してある。

表-1 材料特性値および複素弾性率¹⁾

樹種名	比重	ヤング率 [GPa]			せん断弾性率 [GPa]			ポアソン比		
		E_L	E_R	E_T	G_{LR}	G_{LT}	G_{RT}	ν_{LR}	ν_{LT}	
シトカスプルス picea abies	0.39	11.57	0.902	0.500	0.755	0.716	0.033	0.37	0.47	
		Material loss tangent [$\times 10^{-3}$]								
		6.0	19.3	20.6	13.3	13.9	19.6	≒0		

図-2は、粘弾性の影響を無視した周辺固定された直交異方性板（スプルス柁目板）の400次までの振動数(Hz)の収束性に与える要素分割数の影響が示してある。これより、要素の分割数が少ないと、高次の振動数のスキップが見られるが、要素分割を26×26程度にとれば、高次の振動数までほぼ収束していることがわかる。

図-3には、それぞれ4辺固定、4辺単純支持及び2つの相対する2辺が単純支持と自由辺を持つ正方形スプルス柁目板の400次までの振動数と損失正接 $\tan \delta_P$ の関係が示されている。ただし、幅厚比 b/h は50に仮定している。これより、 $\tan \delta_P$ は、振動数に依存し、低次の振動数領域で小さな値を示すが、振動数の増大とともに、その値は増大する。低次の振動数領域で顕著に見られる振動数により $\tan \delta_P$ が交互に変動しているが、これは振動モードに関係している。一般に、対称モードの $\tan \delta_P$ は、非対称モードの数値より大きな値を示している。また、 $\tan \delta_P$ に与える境界条件は、拘束条件が大きいほど高い数値を示している。

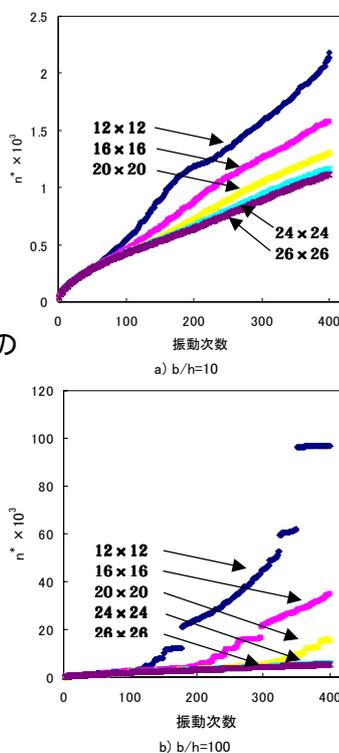


図-2 スプルス柁目板の400次までの n の収束性に与える要素分割数の影響; $a/b=1$, CC-CC

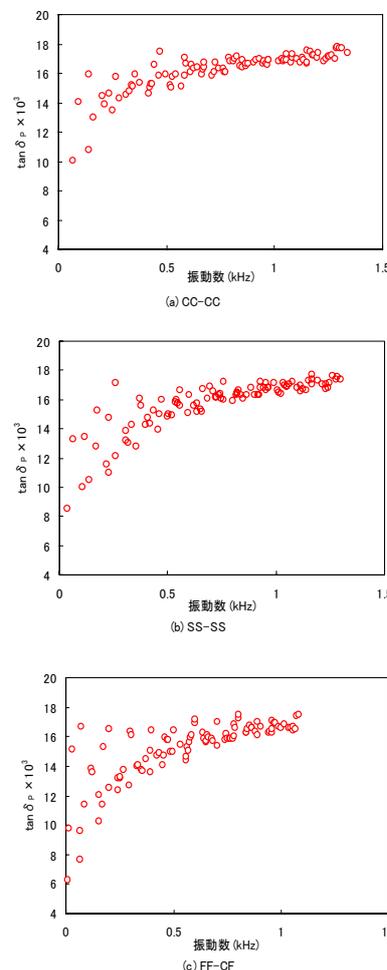


図-3 スプルス柁目板の $\tan \delta_P$; $a/b=10\text{cm}$, $b/h=50$

4. おわりに 本文で得られた結果は以下のようにまとめられる。1) スプルス柁目板の損失正接 $\tan \delta_P$ は、振動数に依存し、低次の振動数領域で小さな値を示すが、振動数の増大とともに、その値は増大する。2) 低次の振動数領域で顕著に見られる振動数により $\tan \delta_P$ が交互に変動しているが、これは振動モードに関係している。一般に、対称モードの $\tan \delta_P$ は、非対称モードの数値より大きな値を示している。3) $\tan \delta_P$ に与える境界条件は、拘束条件が大きいほど高い数値を示している。

参考文献 1)中尾他; 木材板の振動的性質、木材学会誌, Vol. 31, 793-800, 1985. 2)S. Srinivas and A.K. Rao; An exact analysis of free vibrations of simply supported viscoelastic plates, JSV, Vol. 19, 251-259, 1971. 3) M.E. McIntyre and J. Woodhouse; The influence of geometry on linear damping, Acustica, Vol. 39, 209-224, 1978. 4)近藤他; 楽器響板の音響特性 直交異方性板の振動特性, 木材学会中部支部概要, 2000.