

2 方向に変厚な扇形 Mindlin 板の振動解析

大同工業大学大学院 学生員 ○木村健一

大同工業大学 都市環境デザイン学科 正員 水澤富作

1. まえがき 扇形板は、曲線スラブなどの構造要素として用いられており、その振動特性を知ること、設計上重要な課題である。実際に用いられる扇形板の板厚は、半径方向及び円周方向にステップ状またはテーパ状に変化する場合がある。これまでに、半径方向に変断面を有する扇形板の振動解析では、Kim らの薄板理論に基づく Ritz 法を用いた研究¹⁾や水澤らの Spline 要素法を適用した研究²⁾などが挙げられる。また、著者らは³⁾、Spline 要素法を用いて、円周方向に変厚な扇形板の振動解析を行っている。しかしながら、2 方向に変厚な扇形板の振動解析に関する研究は、さほど多く報告されていないように思われる。

本文では、Spline 要素法を用いて、図-1 に示すような 2 方向に任意の変断面形状を有する扇形 Mindlin 板の振動解析を行い、本手法の収束性及精度について検討した。また、任意の境界条件を持つ変厚扇形板の振動特性に与える変厚比、幅厚比、半径比や中心角などの影響について明らかにしている。

2. 式の定式化 Mindlin 板理論とポテンシャルエネルギー最小の原理を用いて、図-1 に示すような 2 方向に変厚な Spline 要素モデルを導く。式の定式化にあたり、次式で表される無次元座標系を用いる。

$$x = q/f, h = (r - R_i)/B, W' = W/B \quad \dots (1)$$

ここで、 W はたわみであり、 $B = R_i(l-1)$ は板幅、 $l = R_o/R_i$ は半径比、 f は中心角、 r は半径であり、また、 R_i と R_o は、それぞれ扇形板の内径と外径を示す。横せん断変形と回転慣性の影響を考慮した Mindlin 板理論では、それぞれ独立した次式の変位関数が要素内で仮定される。

$$\begin{aligned} f_q &= \sum_{m=1}^{i_q} \sum_{n=1}^{i_r} A_{mn} N_{m,k}(\xi) N_{n,k}(\eta) = [N]_{mn} \{\delta_A\}_{mn} \\ f_r &= \sum_{m=1}^{i_q} \sum_{n=1}^{i_r} B_{mn} N_{m,k}(\xi) N_{n,k}(\eta) = [N]_{mn} \{\delta_B\}_{mn} \\ W &= \sum_{m=1}^{i_q} \sum_{n=1}^{i_r} C_{mn} N_{m,k}(\xi) N_{n,k}(\eta) = [N]_{mn} \{\delta_C\}_{mn} \quad \dots (2) \end{aligned}$$

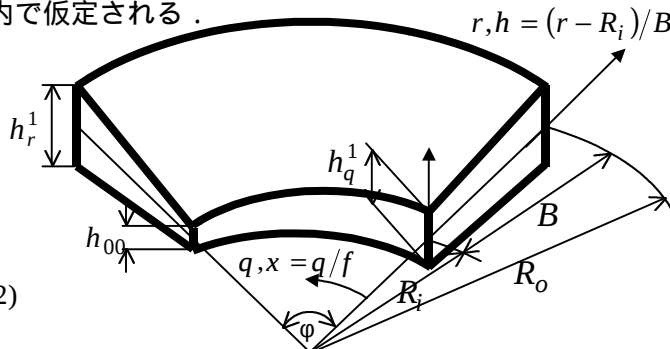


図-1 2方向に変厚な扇形 Mindlin 板と極座標系

板厚が凸型断面の場合は、次式で与えられる。

$$h(x, h) = h_{00} H(x) T(h), H(x) = d_q - (d_q - 1)(1-x)^p, T(h) = d_r - (d_r - 1)(1-h)^q \quad \dots (3)$$

δ_θ と δ_r は変厚比であり $h_q^1/h_{00}, h_r^1/h_{00}$ で表す。また、 p, q は板厚断面の形状を表す多項式の次数である。

変厚扇形 Mindlin 板のひずみエネルギー、 U と運動エネルギー、 T は、それぞれ次式で表される。

$$\begin{aligned} U &= (D_{00}f/2) \int_0^1 \int_0^1 [h_{00}^3 H(x)^3 T(h)^3 \{ (1/f/A)(\partial f_q/\partial x) + (f_r/A) \}^2 + (\partial f_r/\partial h)^2 \\ &\quad + 2n \{ (1/f/A)(\partial f_q/\partial x) + (f_r/A) \} (\partial f_r/\partial h) + 0.5(1-n) \{ (\partial f_q/\partial h) + (1/f/A)(\partial f_r/\partial x) - (\partial f_q/\partial h) \}^2] \\ &\quad + 6(1-n) \kappa (B/h_{00})^2 h_{00} H(x) T(h) \{ (1/f/A)(\partial W'/\partial x) + f_q \}^2 + \{ (\partial W'/\partial h) + f_r \}^2] A dx dh \\ T &= (rh_{00}/2) w^2 f B^4 \int_0^1 \int_0^1 \{ h_{00} H(x) T(h) W'^2 + (1/12)(h_{00}/B)^2 h_{00}^3 H(x)^3 T(h)^3 (f_q^2 + f_r^2) \} A dx dh \quad \dots (4) \end{aligned}$$

ここで、 $D_{00} = Eh_{00}^3/[12(1-n^2)]$ 、 E はヤング係数、 κ はせん断修正係数、 n はポアソン比、 r は密度、 w は円振動数 (rad/sec)、 $A = \{h+1/(l-1)\}$ である。

変厚扇形 Mindlin 板の全ポテンシャルエネルギー、 Π は次式で示される。 $\Pi = U - T \quad \dots (5)$

したがって、式(5)の Π を極値化すれば、次式の固有方程式が得られる。 $\partial \Pi / \partial \{\delta\}_{rs} = 0 \quad \dots (6)$

キーワード 2 方向変厚, Mindlin 扇形板, Spline 要素法, 振動解析

〒457-8532 名古屋市南区白水町 40 大同工業大学都市環境デザイン学科 電話 052-612-5571

3. 数値計算例および考察 数値計算例では、周辺固定された変厚扇形板を対象にして、ポアソン比 ν は 0.3, せん断修正係数 κ は 5/6 に仮定している.

表-1 には、2 方向に線形的に板厚が変化する扇形 Mindlin 板の振動数パラメータ $n_1^* = \omega B^2 \sqrt{r h_{00} / D_{00}}$ の収束性と精度比較が示されている. ここで、幅厚比 $B/h_{00} = 100$, 半径比 $R_0/R_i = 5.0$, 中心角 $f = 60^\circ$ を用い、要素分割数、 $M_r = M_\theta$ は 8 から 24 分割まで変化させている. また、比較のために、Kim ら¹⁾の薄板理論に基づく Ritz 法による解を示してある. これにより、要素分割数の増大に従って、一定値への安定した収束状態が得られている. また、本手法による解は、Kim¹⁾らの結果と良く一致している. 以後の計算例では、 $M_r = M_\theta = 20$ とする. 図-2 は、2 方向に線形的に板厚が変化する周辺固定された扇形板の n_1^* に与える半径方向及び円周方向の変厚比と幅厚比の影響を示している. ここで、 $R_0/R_i = 2.0$, $f = 45^\circ$ を用いている. また h_q^1/h_{00} は 1.0 から 2.0 まで変化させ、また幅厚比は 10, 100 に仮定している. これより、変厚比の増大とともに振動数は増大し、また、幅厚比が大きいと直線的に変化するが、板厚の増大に伴い横せん断変形の影響により、振動数パラメータは非線形な性状を示す. 図-3 は、変厚扇形 Mindlin 板の n_1^* に与える半径比と変厚比の影響を示している. これより、 n_1^* と半径比の関係は、半径比の増大とともに h_q^1/h_{00} の値に関係なく非線形な性状を示す. 図-4 には、変厚扇形 Mindlin 板の n_1^* に与える変厚パターンの影響が示してある. ここで、 B/h_{00} は 10 から 30 まで変化させている. これより、一方向のみに変厚な扇形板では、半径方向に変厚にしたほうが n_1^* は大きな値を示す.

4. まとめ 本文で得られた結果を示すと以下のようになる. 1) 本手法を用いれば任意の変断面と境界条件を持つ扇形 Mindlin 板の振動解析ができ、また、解の安定した収束性と精度が得られる. 2) 変厚扇形板の n_1^* と半径比の関係は、半径比の増大とともに h_q^1/h_{00} の値に関係なく非線形な性状を示す. 3) 一方向のみに変厚な扇形板では、半径方向に変厚にしたほうが n_1^* は大きな値を示し、また 2 方向に変厚にすると n_1^* がかなり大きな値を示す.

参考文献 1) Kim et. al.: J. Sound and Vibr. Vol. 134, 1989. 2) 水澤他: 構造工学論文集, Vol. 45A, 1999. 3) 木村他: 円周方向に変厚な扇形 Mindlin 板の振動解析, 土木学会中部支部研究発表会概要, 2001.

表-1 2 方向に変厚な扇形 Mindlin 板の振動数パラメータの収束性と精度比較: $B/h_{00}=100, R_0/R_i=5.0, \varphi=60^\circ$

h_q^1/h_{00} h_r^1/h_{00} $M_r=M_\theta$		modes			
		1st	2nd	3rd	4th
0.5	0.5	8	24.51	48.36	52.88
		12	23.91	44.69	49.58
		16	23.84	44.25	49.26
		20	23.83	44.17	49.21
		24	23.83	44.15	49.20
		Kim ¹⁾	23.84	44.26	49.54
1.0	0.5	16	32.65	61.21	66.90
		Kim ¹⁾	32.67	61.25	66.94
0.5	1.0	16	35.34	66.62	71.00
		Kim ¹⁾	35.37	66.69	71.10

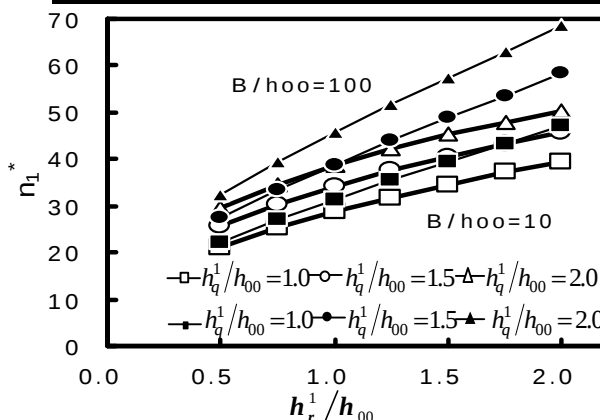


図-2 変厚扇形 Mindlin 板の n_1^* に与える変厚比と幅厚比の影響: $R_0/R_i=2.0, \varphi=45^\circ$

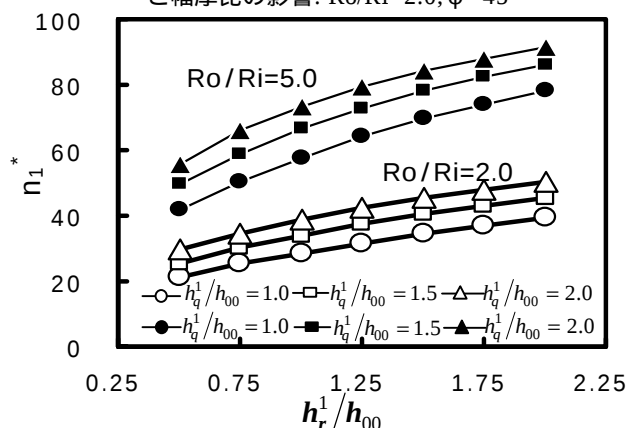


図-3 変厚扇形 Mindlin 板の n_1^* に与える変厚比と幅厚比の影響: $B/h_{00}=10.0, \varphi=45^\circ$

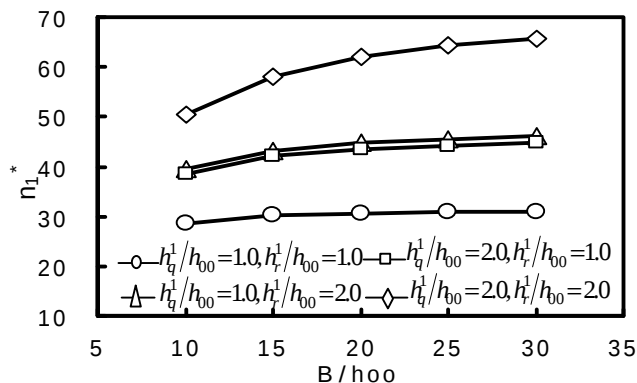


図-4 変厚扇形 Mindlin 板の n_1^* に与える変厚比と半径比の影響: $R_0/R_i=2.0, \varphi=45^\circ$