

# 時間有限要素法による剛体の運動解析

東京電機大学 学生員 田中幹人\*

東京電機大学 正会員 井浦雅司\*

## 1 はじめに

時間方向に有限要素法を適用した時間有限要素法では,拡張されたHamiltonの原理を用いて定式化を行っていることが多い.本研究では,高次関数を用いて拘束条件を含んだ単振り子の動的解析を行い,その問題点を指摘すると共に解決方法についても言及する.

## 2 定式化

Hamiltonの原理<sup>[1]</sup>は汎関数の停留条件より系の運動方程式を導くものであり,その際に時間の始点と終点における位置の変分を零と仮定している.拡張されたHamiltonの原理は,時間の始点と終点における位置の変分が同時に零となる仮定は妥当でないとし<sup>[2]</sup>, Eulerの方程式として, Lagrangeの運動方程式だけでなく,速度(運動量)に関する初期条件が得られる汎関数である.また,以下に示す拘束条件が与えられた時,

$$f(t, u) = 0 \quad (1)$$

Lagrangeの未定乗数 $\lambda$ を用いて,以下に示すような拘束条件式の無い変分原理が得られる.

$$H = \int_{t_0}^{t_1} [L + \lambda f(t, u)] dt - [pu]_{t_0}^{t_1}, \quad L = T - U \quad (2)$$

$$dH = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \left\langle \frac{\partial \{L + \lambda f(t, u)\}}{\partial u} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \right) \right\rangle du + f(t, u) d\lambda \right] dt - \left[ \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} - p \right) du \right]_{t_0}^{t_1} \quad (3)$$

ここで $H$ はHamilton関数, $L$ はLagrange関数, $T$ は運動エネルギー, $U$ は位置エネルギー, $u$ は変位である.なお, $p$ は運動量であり変分をとらない.

## 3 数値計算例

拘束条件を含んだ数値計算例として,ここでは,図1に示す単振り子を考える.拘束条件は,剛体の端点が常に点Oにあるということであり,このとき(3)式は以下のように書ける.

$$dH = \int_{t_0}^{t_1} [(-m\ddot{x} + l_1)dx + (-m\ddot{y} + mg + l_2)dy + (-I\ddot{f} - l_1 l \cos f + l_2 l \sin f)df + (x - l \sin f)dl_1 + (y - l \cos f)dl_2] dt + [(m\dot{x} - p_x)dx + (m\dot{y} - p_y)dy + (I\dot{f} - p_f)df]_{t_0}^{t_1} = 0 \quad (4)$$

(4)式の停留条件より,運動方程式,Lagrange乗数に関する式,拘束条件式,さらに時間の始点と終点における運動量の定義式がEulerの方程式として得られる.ここで, $m$ は剛体質量, $I$ は慣性モーメント, $l$ は部材長である.(4)式において,時間に関する積分には,ガウスの数値積分を用い,その結果得られる代数方程式の解法にはニュートン法を用いる.

はじめに,(4)式において,変位に時間の1次関数,Lagrange乗数を定数として解析を行った.図2に時間刻幅 $t=0.5$ として,計算値と厳密解を示す.なお,初期角度は $f_0 = \frac{p}{3}$ であり,厳密解より得られる周期は $T = 8.989$ 秒である.図2より,計算値は3周期目あたりで発散することがわかる.

次に,変位に時間の3次関数,Lagrange乗数を定数として解析を行ったが,計算値はすぐに発散し,収束解は得られなかった.

## 4 提案手法

### 4.1 $u$ : 3次関数, $\lambda$ : 1次関数

3次変位関数を用いて,解が発散した原因として,Lagrange乗数を定数とおいたことが考えられる.(4)式の第1,2項より,Lagrange乗数は変位の2階微分で表される.すなわち,変位が3次関数ならば,Lagrange乗数は1次関数となる.そこで,変位を3次関数,Lagrange乗数を1次関数として計算したところ,Lagrange乗数を定数とおいた時と同様に,収束解は得られなかった.

keywords: time finite element, multibody dynamics, holonomic constraints

\* 埼玉県比企郡鳩山町石坂 東京電機大学理工学部建設工学科

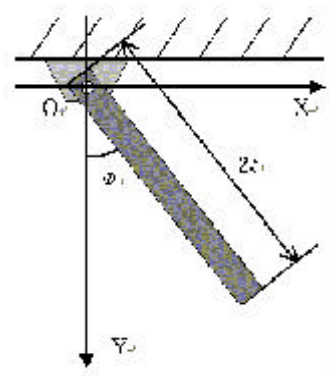


図1 解析モデル

#### 4.2 u: 3 次関数, 運動量無し

変位に 3 次関数を用いる時, 変位関数は速度を含んでいる. そのため, (4) 式の運動量  $p$  を用いなくとも, 初期速度の設定は可能となる. そこで, 以下の式を用いて, 運動量に関する境界条件項を消去する.

$$p_x = m\dot{x}, p_y = m\dot{y}, p_f = I\dot{f} \quad (5)$$

この手法を用いて Lagrange 乗数を定数, 時間の 1 次関数と おく 2 通りの手法で時間刻幅  $t=0.5$  で解析を行った. その結果, Lagrange 乗数を定数とおいた時, 解は振動しながら発散した. また, Lagrange 乗数を時間の 1 次関数とおいた時, 解は緩やかに発散した.

#### 4.3 u: 3 次関数, 拘束条件無し

4.2 の手法で, (4) 式の Lagrange 乗数を消去すると, 角度のみの 1 変数で表される. これを時間刻幅  $t=0.5$  で解析を行った. その結果, 4 周期目までは, 図 2 に示す厳密解とほぼ一致しており, これより拘束条件項が解の発散の原因と考えられる. なお, 時間  $t=100 \times T$  周辺における計算結果を図 3 に示すが, 本手法では時間経過と共に振幅が小さくなること がわかる.

#### 4.4 拘束条件項の変更

拘束条件式を (4) 式に示すような形で Hamilton 関数の中に挿入すると, 必ずしも厳密な拘束条件式とはならない. そこで, 本報告では, (4) 式の拘束条件項を積分せず, Lagrange 乗数を定数とおいた時は, 終点  $t_1$  における変位を厳密に拘束するよう以下の式を用いた.

$$x_{t_1} - l \sin f_{t_1} = 0, y_{t_1} - l \cos f_{t_1} = 0 \quad (6)$$

また, Lagrange 乗数を時間の 1 次関数とおいた時は, 終点  $t_1$  における変位と速度を厳密に拘束するよう, (6) 式の他に以下に示すような速度の拘束条件式を用いた.

$$\dot{x}_{t_1} - l \dot{f}_{t_1} \cos f_{t_1} = 0, \dot{y}_{t_1} + l \dot{f}_{t_1} \sin f_{t_1} = 0 \quad (7)$$

先に述べた手法全てにおいて (但し, 4.3 は除く) 拘束条件項を 各々置き換え, 時間刻幅  $t=0.5$  で解析を行った. その結果, 何れの手法も拘束条件項は正確に満たされているため 4 周期目までは 図 2 の厳密解とほぼ一致した計算値が得られた. しかし, 数値計算では, 時間経過に伴い誤差が大きくなることが知られている. そこで, 拘束条件項変更後の解の安定性を確かめるため, これまでと同様に時間刻幅  $t=0.5$  により計算する. 図 3 に時間  $t=100 \times T$  周辺の  $t$ - $\phi$  曲線を示し, 表 1 に 100 周期目における周期と振幅の誤差を示す. まず, 振幅に注目すると, 図 3 より, 振幅がほぼ一定に保たれている手法は, 3 の数値計算例で示した 2 つの手法と, 4.1 で示した手法である. それ以外の手法では, 全て振幅は減少した. 次に, 周期に注目すると, 図 3 より, 3 の数値計算例で変位に 3 次関数を用い Lagrange 乗数を定数とおいた手法が, 最も厳密解に近い手法であることがわかる. これらの比較結果を表 1 に示す. これより, 振幅, 周期共に最も安定した解が得られた手法は, 変位に 3 次関数を用い, Lagrange 乗数を定数とおき, 拘束条件項を変更したものである.

#### 5 まとめ

本研究では拡張された Hamilton の原理を用い, 拘束条件を伴う単振り子の解析を行った. 変位関数に時間の 1 次, 3 次関数を用いたが何れも解が発散してしまった. その解決法として, 拘束条件を置き換えることにより, 安定した解が得られることを示した.

#### 参考文献

- [1] 原島 鮮, 力学, 裳華房 1996.  
[2] 井浦雅司, 拡張された Hamilton の原理と時間有限要素法への応用, 構造工学論文集 Vol.37A, 1991.

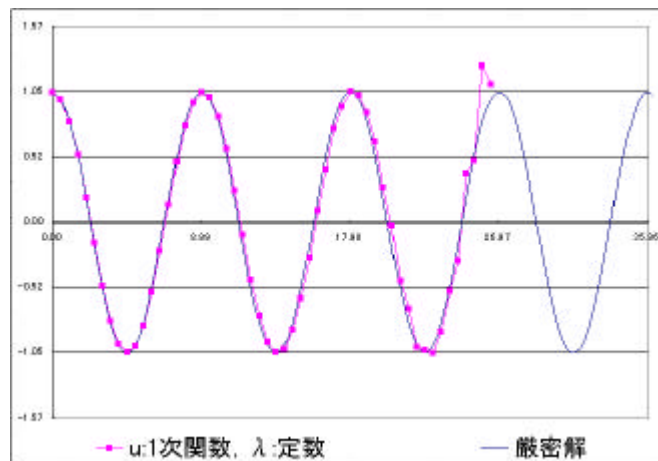


図 2  $t$ - $\phi$  曲線

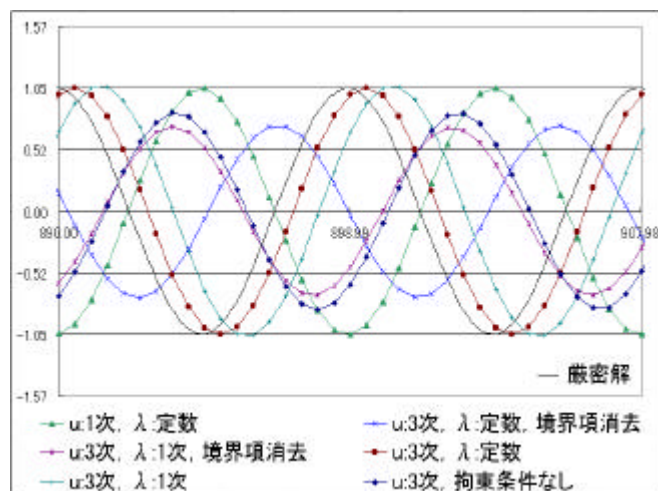


図 3  $t=100 \times T$  における  $t$ - $\phi$  曲線

表 1  $t=100 \times T$  における周期, 振幅の誤差

| 手法                | 振幅(%)  | 周期(秒) |
|-------------------|--------|-------|
| u:1次, λ:定数        | 0.00   | 4.5   |
| u:3次, λ:定数        | 0.00   | 0.5   |
| u:3次, λ:1次        | 0.06   | 1.5   |
| u:3次, λ:定数, 境界項消去 | -29.85 | -19.5 |
| u:3次, λ:1次, 境界項消去 | -31.93 | -22.5 |
| u:3次, 拘束条件なし      | -20.34 | -14.0 |