位相特性を用いた非定常時系列波形の最大値に関する確率論的検討

東京工業大学大学院総合理工学研究科　正会員　盛川　仁　　鳥取大学工学部　正会員　池内智行
鳥取大学大学院　学生員　矢田祐子　川上裕美

1．はじめに　隣り合うフーリエ位相の差である位相差分分布と時刻歴波形の包絡形と類似性があることは、よく知られている[1)]。また、フーリエ位相の振動数軸に対する傾きである群遅延時間スペクトルの平均値は時刻歴波形の重心位置と、そのばらつきは継続時間と密接に関係していることが示されている[2)]。そのため、位相スペクトルそのものよりも群遅延時間を用いる方が波形の非定常的な性質を把握しやすい。本研究では、位相特性の影響を大きく受けると考えられる非定常時系列波形の最大値と群遅延時間の関係について確率論的観点から考察する。この結果は、応答スペクトルのような最大値に依存する量を振動数領域から直接予測するための有用な情報を与えるものと期待される。

2．位相特性を考慮した波形のシミュレーション方法　群遅延時間 $t_{gr}(\omega)$ の確率分布が時系列波形の包絡形状と強い相関を有するため、$t_{gr}(\omega)$ の分布特性を変えることにより種々の非定常波形をシミュレートすることができる。以下では、位相特性の影響を調べることが目的であるから、フーリエ振幅特性については振動数軸上で一定値とし、$t_{gr}(\omega)$ の確率分布特性は振動数によらず同じものを与える。

$t_{gr}(\omega)$ は、フーリエ位相スペクトル $\phi(\omega)$ を振動数 ω 軸上で微分したもので、$t_{gr}(\omega)=\frac{d\phi(\omega)}{d\omega}$ によって定義される。シミュレーションでは離散フーリエ変換を用いるので、振動数 ω_k におけるフーリエ位相を ϕ_k とすると、ϕ_k の実現値は漸化式 $\tilde{\phi}_{k+1}=\tilde{\phi}_k+\tilde{t}_{gr}(\omega_k)d\omega\ \ (k=1,2,\cdots)$ で表される。ここで、$\tilde{}$ はその確率変数の実現値の一つを表すものとし、初期位相 ϕ_1 には、$0\sim 2\pi$ の一様乱数からの実現値を与える。

3．非定常波形の最大値の確率分布　従来から、定常波に包絡線をかけることによって非定常波形をシミュレートすることが広く行われてきた。このようにして得られる非定常波と上述の手法との対応関係、及び最大値の確率分布モデルについて検討する。

適当な確率分布関数に従う $t_{gr}(\omega)$ の実現値を用いて上述の手法に従ってシミュレートされる波形を Wave 2、定常波にこの確率密度関数と相似な包絡形をかけた波形を Wave 1 としてこれらの最大値の確率分布特性を比較する。解析においては、それぞれ 10000 回のシミュレーションを実施し、その頻度分布を調べた。また、定常波に包絡形をかけた波形 (Wave 1) の rms 強度と $t_{gr}(\omega)$ を用いて求めた波形 (Wave 2) のそれとが等しくなるような補正係数を近似的に求めて振幅を補正する。

$t_{gr}(\omega)$ の確率分布として一様分布を与えた場合には、シミュレーションによって得られた波形は定常波となる。このとき、Wave 1 と Wave 2 の最大値の頻度分布は一致すべきものであり、数値計算においてもそのことを確かめることができた。確率分布としてガウス分布を与えた場合の Wave 2 の最大値の頻度分布を図 1 に示す。Wave 1 の最大値の頻度分布もほぼ同じ形状を示すが、Wave 2 より Wave 1 の方が平均値がやや大きくなる。これは、rms 強度の補正係数の近似による誤差であると考えられる。したがって、従来より用いられてきた包絡線をかけた波形と前節で述べた手法によって得られる波形の最大値の確率論的性質はほぼ等しいといえる。

一般にこのような問題における最大値の確率分布は、第一種極値分布 (グンベル分布) に従うとされている。そこで、シミュレーションから得られた最大値の平均及び分散を有するグンベル分布の関数形を図 1 に破線で示した。この図にみられるとおり頻度分布とグンベル分布は非常によく一致しており、このことは、非定常波形における最大値の確率分布としてグンベル分布をあてはめ得ることを示している。$t_{gr}(\omega)$ の確率分布として与える関数形によらず、同様の結果が得られることも数値計算によって確かめられた。

Keywords: 群遅延時間，最大値，1 自由度系，グンベル分布，非定常時系列波形
〒 226-8502 横浜市緑区長津田町 4259 (e-mail: morik a@enveng.titech.ac.jp)

4．1 自由度系の最大応答変位の確率分布　応答スペクトルを $t_{gr}(\omega)$ を使って予測することを念頭におき、上で得られた非定常波を入力波として 1 自由度系に入力した場合の最大応答変位について考察する。本節では、$t_{gr}(\omega)$ の確率分布として次式を用いた[3)]。

$$f_{tgr}(x) \;=\; \frac{0.711\sigma_{tgr}}{(x-\mu_{tgr})^2\sqrt{2\pi}} - \frac{0.253\sigma_{tgr}^2}{|x-\mu_{tgr}|^3}\exp\left(\frac{0.253\sigma_{tgr}^2}{(x-\mu_{tgr})^2}\right)\left\{1-\Phi\left(\frac{0.503\sigma_{tgr}}{|x-\mu_{tgr}|}\right)\right\} \qquad (1)$$

ここで、$\Phi(x)$ は誤差関数、μ_{tgr} 及び σ_{tgr}^2 は $t_{gr}(\omega)$ の平均と分散である。このとき、μ_{tgr}、σ_{tgr}^2 は相対的に大きい振幅を有する波群の中心位置及び長さを支配するパラメータである。μ_{tgr} は一定とし、種々の σ_{tgr}^2 について最大応答変位の平均、標準偏差、頻度分布を 1000 回のシミュレーションより求める。

シミュレーションから得られた頻度分布は σ_{tgr}^2 の値によらず、最大応答変位の分布形はグンベル分布とよい一致を示した。次に、最大応答変位の平均及び標準偏差が、σ_{tgr} とどのような関係にあるか検討する。1 自由度系の減衰定数 h が 5% の場合の最大応答変位の平均を図 2 に示す。また、それの標準偏差は平均とほぼ同じ性質を示すので以下では平均についてのみ述べる。σ_{tgr} がある値以上になるとその値は一定値となっている。この値は定常応答の最大値の平均と一致しており、$t_{gr}(\omega)$ の標準偏差 σ_{tgr} がある程度大きくなると入力波は定常波とみなしうることがわかる。また、σ_{tgr} の小さい領域では、1 自由度系の応答はインパルス応答関数でほぼ近似できる。このことは、図 2 において σ_{tgr} が小さくなるにつれて、インパルス応答関数の最大値を示す水平な破線がその値に漸近していることからも理解される。一方、σ_{tgr} がこれらの中間の値をとる遷移領域では、両対数軸上でほぼ直線的に変化している。減衰定数の値によらずこのような性質は認められるが遷移領域における傾き α 及び最大応答変位が定常応答の場合と一致する点 (折れ曲がり点) β は減衰定数 h に依存する。そこで、種々の h に対する最大応答変位の α と β を調べた。h と α の関係を図 3 に示す。このとき、$\alpha = a + \frac{b}{h}$ の形の関数にあてはめることができ、β についても同様である。

以上より、σ_{tgr} と減衰定数 h が与えられれば、以下の手順により容易に最大応答変位の確率分布を予測できる。すなわち、(i) h より傾き α と折れ曲がり点 β を求める。(ii) 定常応答の理論解を用いて、σ_{tgr} の遷移領域での最大応答変位の平均、標準偏差を図 2 と同様に σ_{tgr} 軸に対してプロットする。(iii) 最大応答変位はグンベル分布となることがわかっているので与えられた σ_{tgr} に対応する最大応答変位の平均及び標準偏差を求め、グンベル分布の式にあてはめる。

5．まとめ　非定常な入力波の最大値、1 自由度系の最大変位応答は、いずれも入力波の位相特性を規定する確率分布特性によらずグンベル分布に従う。また、フーリエ振幅スペクトルが一定値をもつならば、減衰定数 h、σ_{tgr} を用いて 1 自由度系の最大変位応答の確率分布を推定可能とするモデル化を行った。今後は、振幅の周波数特性も考慮した最大応答変位のモデル化をすすめていく予定である。

参考文献　1) 大崎：新・地震動のスペクトル解析入門、鹿島出版会、1994. 2) 和泉・勝倉：日本建築学会論文集, 第 327 号, pp.20–26, 1983. 3) 盛川ほか：第 25 回地震工学研究発表会講演論文集，1999.7, pp.93–96.

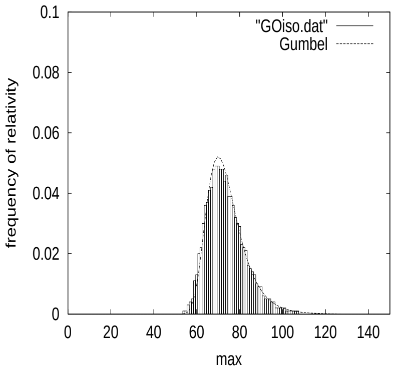

図 1 Wave 2 の最大値の頻度分布 (ガウス分布を与えた場合)

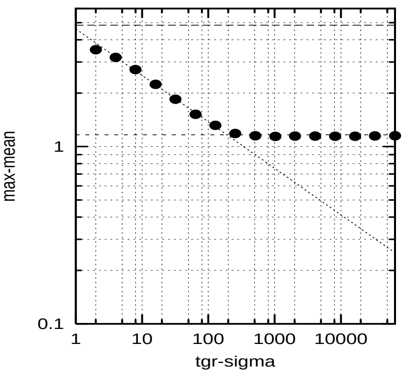

図 2　σ_{tgr} と最大応答変位の平均の関係

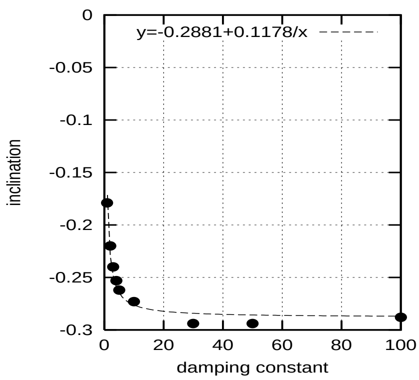

図 3　減衰定数と遷移領域における傾き α の関係