

ウェーブレットを用いた Wigner 分布で規定される 時間周波数特性に基づく波形分離

京都大学工学部 学生員 ○大濱吉礼
京都大学防災研究所 正員 本田利器

1. はじめに

地震動は非定常な時系列信号であり、その周波数特性は時間とともに変化する。周波数特性の時間的変化は時間周波数特性と呼ばれ、時系列信号が有する重要な特性である。地震動波形は、異なる時間周波数特性を有する複数の波が重ね合わさった波形である。したがって、地震動波形の分離を考える際には、時間周波数特性に基づいて波形を分離する必要がある。本研究では、Wigner 分布を用いて時間周波数特性を規定し、時間-周波数平面上で波形を分離する手法について検討する。

Wigner 分布は、地震動や音・振動のような時系列信号の時間周波数特性を調べる手法の1つである¹⁾。Wigner 分布は、解像度が高い、周辺条件も満たす、等の好ましい特性を有するが、一般には逆変換ができないという性質も有する。本研究では、ウェーブレットを用いることにより、Wigner 分布により規定される時間周波数特性を有する時刻歴波形を合成する手法を提案する。そして、提案手法を地震動波形の時間-周波数平面での分離に適用し、その有効性を検討する。

2. Wigner 分布

時系列信号 $s(t)$ の Wigner 分布 $W(t, \omega)$ は、次式で与えられる¹⁾。

$$W(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int s^* \left(t - \frac{\tau}{2} \right) s \left(t + \frac{\tau}{2} \right) e^{-i\omega\tau} d\tau \dots\dots\dots (1)$$

ここで、* は複素共役を表す。Wigner 分布はエネルギー分布に相当し、時間 t - 周波数 ω における信号のエネルギーを表す。したがって、高い解像度で信号の時間周波数特性を調べることができ、局所的な成分であっても検出が可能となる。

一方で Wigner 分布は、逆変換の利用には難しい面をもつ。ある時系列信号から Wigner 分布が生成するとき、その Wigner 分布を元の時系列信号に逆変換することは可能である。このとき、その Wigner 分布は表現可能な Wigner 分布と呼ばれる。しかし、任意の Wigner 分布が表現可能な Wigner 分布であるとは限らず、したがって時系列信号に逆変換可能であるとは限らない。また、Wigner 分布は干渉項と呼ばれる付加的な値をもつため、表現可能な Wigner 分布になるように時間周波数特性を規定することは、ほぼ不可能である。

3. Wigner 分布からの波形合成法

ウェーブレットを用いて Wigner 分布を表現可能な Wigner 分布に近似することで、任意の Wigner 分布から波形を合成する手法について述べる。このとき、用いるウェーブレットは正規直交性を有するものとする。

時系列信号 $s(t)$ は、ウェーブレットと呼ばれる関数 $\psi_{jk}(t)$ を用いて、以下のように展開される。

$$s(t) = \sum_{j,k} \alpha_{jk} \psi_{jk}(t) \quad j, k \in Z \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 α_{jk} はウェーブレット係数と呼ばれる係数である。なお本研究では、Meyer の構成法によるウェーブレット¹⁾を用いた。

2つのウェーブレット $\psi_{jk}(t)$ と $\psi_{lm}(t)$ の Cross-Wigner 分布¹⁾ $W_{jk,lm}(t, \omega)$ は、以下のように表される。

$$W_{jk,lm}(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int \psi_{jk}^* \left(t - \frac{\tau}{2} \right) \psi_{lm} \left(t + \frac{\tau}{2} \right) e^{-i\omega\tau} d\tau \dots\dots\dots (3)$$

なお、ここでは $(j, k) = (l, m)$ の場合も Cross-Wigner 分布と呼ぶ。いま、Wigner 分布の内積を

$$\langle W_1(t, \omega), W_2(t, \omega) \rangle = 2\pi \int \int W_1(t, \omega) W_2^*(t, \omega) dt d\omega \dots\dots\dots (4)$$

キーワード: Wigner 分布, ウェーブレット, 波形合成

連絡先: 〒 611-0011 京都府宇治市五ヶ庄 Tel 0774-38-4067/ Fax 0774-38-4070

と、時間領域と周波数領域の両者において積分することにより定義する。このとき、2つのウェーブレットの Cross-Wigner 分布 $W_{j_1 k_1, l_1 m_1}(t, \omega)$ と $W_{j_2 k_2, l_2 m_2}(t, \omega)$ の内積をとると、Moyal の公式³⁾より次式が成り立つ。

$$\langle W_{j_1 k_1, l_1 m_1}(t, \omega), W_{j_2 k_2, l_2 m_2}(t, \omega) \rangle = \delta_{j_1, j_2} \delta_{k_1, k_2} \delta_{l_1, l_2} \delta_{m_1, m_2} \dots \dots \dots (5)$$

つまり、ウェーブレットの Cross-Wigner 分布の正規直交性が言える。

したがって、

$$W_p(t, \omega) = \sum A_{jk, lm} W_{jk, lm} \quad \text{ここで} \quad A_{jk, lm} = \langle W(t, \omega), W_{jk, lm}(t, \omega) \rangle \dots \dots \dots (6)$$

として、Wigner 分布 $W(t, \omega)$ の、ウェーブレットの Cross-Wigner 分布を基底にもつ空間への射影 $W_p(t, \omega)$ を考えることができる。 $W(t, \omega)$ が表現可能な Wigner 分布であるとき、 $A_{jk, lm}$ とウェーブレット係数 α_{jk} と α_{lm} について、次のような関係が成り立つ。

$$A_{jk, lm} = \alpha_{jk}^* \alpha_{lm} \dots \dots \dots (7)$$

この関係を用いて、Wigner 分布からウェーブレット係数が求められる。ただし、 $W(t, \omega)$ が表現可能な Wigner 分布でないとき、 $A_{jk, lm}$ を近似してウェーブレット係数を決定する。本研究では、 $(j, k) = (l, m)$ となる $A_{jk, lm}$ 及び絶対値が大きい $(j, k) \neq (l, m)$ となる $A_{jk, lm}$ の値からウェーブレット係数を決定した。

式(6)(7)から得られたウェーブレット係数を式(2)に代入して、Wigner 分布から時系列信号が合成される。

4. 解析例

提案手法を実地震動波形の分離に適用した例を示す。この例では、実地震動を表面波と実体波に分離することを試みた。対象とする実地震動としては、兵庫県南部地震で阿倍野において観測された記録(NS成分)を用いる。以下の検討では、サンプリング0.4[sec]、データ数512とし、ナイキスト周波数より高い周波数の成分をゼロとしたものを用いている。

地震動波形のWigner分布を計算した結果が、図-1である。(i)の領域が実体波のWigner分布に、(ii)の領域が表面波のWigner分布に相当すると考えられる。地震動波形のWigner分布を(i)と(ii)に分割し、提案する手法を用いて各々のWigner分布から波形を合成した。その結果が図-2である。(a)が実体波に相当する波形、(b)が表面波に相当する波形である。その2つを重ね合わせた波形と対象とする地震動波形をプロットしたのが(c)である。

提案する手法を用いて、図-1(i)(ii)のように、時間一周波数平面上で波形を分離した。特に実体波に相当する波形(図-2(a))を見ると、分離した波形が、始めの部分では低周波成分が卓越し、時間の経過につれて高周波成分が卓越していく、という時間周波数特性をよく表現していることが分かる。

5. おわりに

時間周波数特性をWigner分布を用いて規定し、時系列信号を合成する手法を提案した。Wigner分布をウェーブレットのCross-Wigner分布を基底にもつ空間に射影することで、時間一周波数平面では困難な表現可能なWigner分布への近似が容易となり、任意のWigner分布から時系列信号を合成することができることを示した。そして、提案手法を、実地震動波形の時間一周波数平面上での分離に適用し、その有効性を検討した。

参考文献

- 1) L. コーエン：時間一周波数解析, 朝倉書店
- 2) 佐々木文夫・前田達哉・山田道夫：ウェーブレット変換を用いた時系列データの解析, 構造工学論文集, Vol.38B, 1992.
- 3) J.E.Moyal: Quantum Mechanics as a statistical theory, Proceedings of Cambridge Philosophical Society, Vol.45, pp.99-124, 1979.
- 4) 関西地震観測研究協議会：関西地震観測研究協議会地震記録 CD-ROM

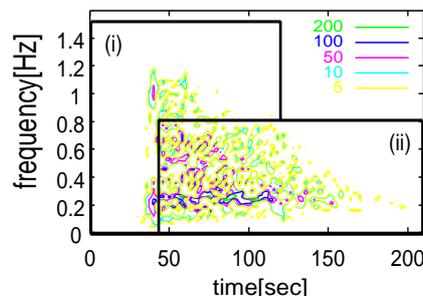


図-1 地震波形の Wigner 分布とその分割

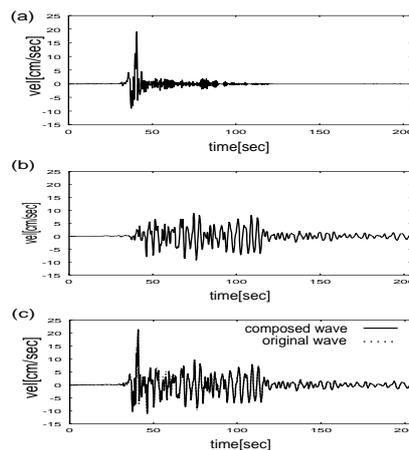


図-2 実体波に相当する波形と表面波に相当する波形