

成層弾性波動場の Green 関数に寄与する放射条件を満足する複素 Rayleigh 波モードの性質

東京理科大学 理工学部 正会員 東平光生¹

1. はじめに

Lamb の問題¹⁾ 以来, 成層弾性体の Green 関数を表す波数積分は, 正規モードに関する留数項と分岐線積分に分解されることが知られている. しかし, 成層弾性波動場の Green 関数のスペクトル表現²⁾ で Green 関数を合成する際, permissible sheet 上での複素 Rayleigh 極を考慮することが必要不可欠となる. この複素 Rayleigh 極は Watson³⁾ によって 30 年ほど前に指摘され, 2-D の波動場での性質が論じられている. 3-D の波動場については horizontal wavefunction に Hankel 関数を用いることから, 複素 Rayleigh 波の性質を数学的に把握することは, 2-D に比べ煩雑となる. 本論文はこの複素 Rayleigh 波の性質について, 3-D での Green 関数のスペクトル表現を得るという観点から論じている.

2. Permissible sheet 上での複素 Rayleigh 極モードの性質

ここでは, **Fig. 1** に示す成層弾性波動場について考える. Radiation condition を満足する波動のための Riemann 葉, すなわち, permissible sheet 上の複素 Rayleigh 極と正規モードの極の位置関係を第 1 象限について **Fig. 2** に示す. ここの正規モードは Love 波を含んでいる. Love 波については, 波数領域の方程式の微分作用素の対称性から極はすべて実数となることが示せる. ここで正規モードの極は通常の bisection 法により求めた. また, 複素数極については, 特性関数 $\chi(k, \omega)$ の導関数を

$$\chi'(k, \omega) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\chi(k', \omega)}{(k' - k)^2} dk' \quad (1)$$

で算定し Newton 法を用いた. 複素 Rayleigh 極は絶対値で 30 km^{-1} 程度まで与えたが, 絶対値の大きな極を数値的に求めることは難しくなってくる.

ここでは, 地盤の材料物性と加振振動数 ω を実数で与えている. このとき, 次の Lemma を与えることができる.

Lemma 1 k_n を複素 Rayleigh 極, $\varphi_n(z)$ をこの複素 Rayleigh 極に対する固有関数とする. このとき, k_n の共役複素数 k_n^* はやはり複素 Rayleigh 極であり, これに対する固有関数は $\varphi_n(z)$ の複素共役の関係にある $\varphi_n^*(z)$ である. また, 互いに複素共役の関係にある固有値のエネルギー積分も複素共役の関係にある.

波数領域の Green 関数の正規モード極での留数は, 正規モードへ分解することができるが, この分解定理は複素 Rayleigh 極についても, そのまま適用できる. すなわち,

Lemma 2 k_n を複素 Rayleigh 極, $\varphi_n(z)$ をこの複素 Rayleigh 極に対する固有関数とする. 波数領域の Green 関数を $g_\kappa^m(z, z')$ とすると,

$$\text{Res}_{\kappa=k_n} g_\kappa^m(z, z') = \frac{\varphi_n(z)\varphi_n(z')^T}{2k_n I_2 + 2I_3} \hat{\mathbf{F}}^m \quad (2)$$

ただし, m は空間座標の方位角の Fourier 成分の次数, I_2 および I_3 はエネルギー積分²⁾, $\hat{\mathbf{F}}^m$ は波数領域の外力ベクトルを示す.

波数領域の Green 関数を合成する際, 3-D では horizontal wavefunction に Hankel 関数が用いられる. 複素変数の Hankel 関数の性質のうち,

Lemma 3

$$H_m^{(2)}(z^*) = (H_m^{(1)}(z))^* \quad (3)$$

を複素 Rayleigh 波の性質の検討に用いる. この式を証明するためには Hankel 関数の複素積分表示を用いればよい. ただし, この式のみ z は複素変数として用いられている.

Horizontal wavefunction を用いて複素 Rayleigh 波モードの Green 関数への寄与を計算すると, 次式を得る.

$$\mathbf{G}_c(r, \theta, z) = -\frac{i}{4} \sum_m \sum_{k_n \in \sigma_{p_l}} \left[k_n \mathbf{H}_{k_n}^{m(2)}(r, \theta) \text{Res}_{\kappa=k_n} g_\kappa^m(z, z') - k_n^* \mathbf{H}_{k_n^*}^{m(1)}(r, \theta) \text{Res}_{\kappa=k_n^*} g_\kappa^m(z, z') \right] \quad (4)$$

¹ 〒 278-8510 野田市山崎 2641, phone 0471-24-1501, fax 0471-23-9766
キーワード: 成層構造, Green 関数, 複素 Rayleigh 波

ただし, σ_{p_l} は第 4 象限に存在する複素 Rayleigh 極の集合, $\mathbf{H}_k^{m(\tau)}(r, \theta)$, ($\tau = 1, 2$) は Hankel 関数 $H_m^{(\tau)}$ を用いて構成した horizontal wavefunction である. また, $\mathbf{G}_c(r, \theta, z)$ は Green 関数への複素 Rayleigh 波モードの寄与である. Lemma 1 から 3 を用い, さらに $\hat{\mathbf{F}}^m$ の性質を考慮することで次の定理を得る.

Theorem 1 $\mathbf{G}_c(r, \theta, z)$ の虚数部はゼロである. すなわち,

$$\text{Im} \{ \mathbf{G}_c(r, \theta, z) \} = 0 \quad (5)$$

これより, 複素 Rayleigh 波は, 非伝播性の波動である.

3. 数値計算例

Fig. 1 の解析モデルに従い, 加振振動数を 1 Hz, $F = 1.0 \times 10^7$ kN として地表面変位を計算した結果を **Fig. 3** に示す. ここでは, Green 関数のスペクトル表現と直接積分の結果を比較している. 両者の良好な一致は Green 関数のスペクトル表現に複素 Rayleigh 波を考慮したためである. **Fig. 4** は Green 関数を構成する複素 Rayleigh 波を示している. 震源直上付近で, 複素 Rayleigh 波の振幅は無視し得ないほど大きい, その後急速に振幅は減少する.

4. おわりに

Green 関数を構成する複素 Rayleigh 波について述べた. この複素 Rayleigh 波は非伝播性の波動であり, 震源直上付近で非常に大きな振幅をもっている. したがって, Green 関数のスペクトル表現を用いる限り, このモードの影響を考慮することは, 震源付近で特に必要なことになる.

参考文献

- 1) Lamb, H. (1904): On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid, *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, **A203**, 1-42.
- 2) 東平光生 (1998): 離散および連続スペクトルの固有関数を用いた成層弾性波動場の Green 関数の表現, 土木学会論文集, No. 605/I-45, 171-185.
- 3) Watson, T.H.(1972). A real frequency, complex wavenumber analysis of leaking modes, *Bull. Seis. Soc. Am.*, **62**, pp. 369-384.

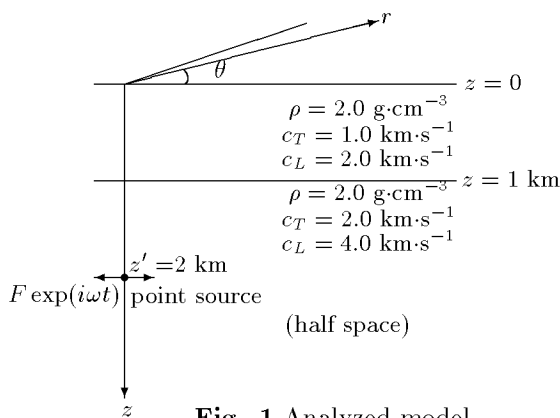


Fig. 1 Analyzed model.

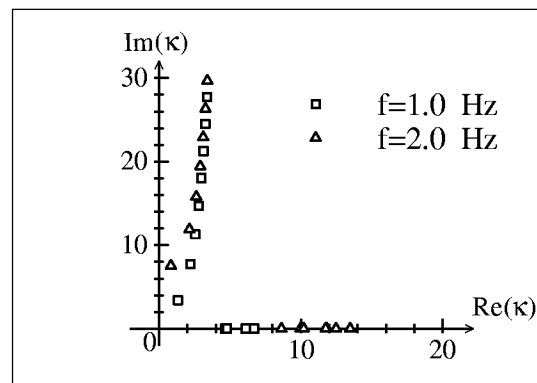


Fig. 2 Location of poles in the permissible sheets.

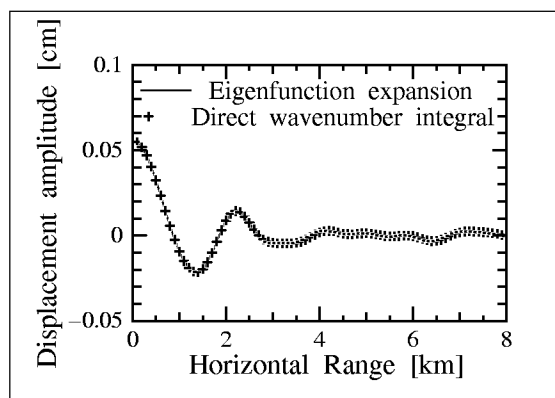


Fig. 3 Comparison of Green's function.
(radial component)

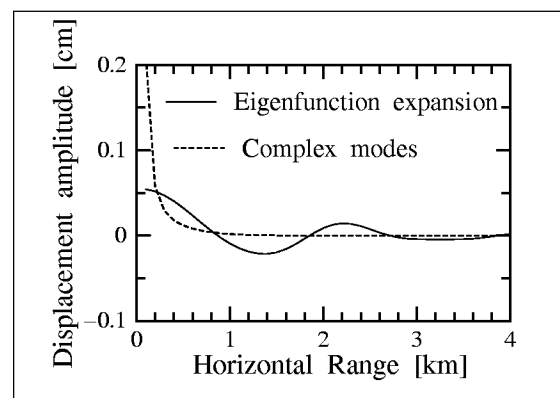


Fig. 4 Effects of the complex modes.
(radial component)