Spectral 確率有限要素法による波動伝播解析の時間積分

京都大学防災研究所　正会員　本田 利器

1. はじめに

地震動は地盤中を伝播する波動であるため地盤の物性が地震動の伝播特性に影響を与えることは明らかである．しかし，地盤は不均質な媒体であり，その地盤物性を完全に知ることは不可能である．したがって，地盤情報の不確定性の影響を考慮した地震動の設定法を検討することは重要な課題である．

このような確率場を対象とした解析に用いられる手法としてはモンテカルロシミュレーションも挙げられるが，ここでは，Ghanem ら[1)]が提案している Spectral 確率有限要素法を波動伝播問題に適用する．また，その解析において，新しい時間積分法を適用することにより，数値解析を効率的に行う手法を提案する．

2. Spectral 確率有限要素法による波動伝播解析

Spectral 確率有限要素法（SSFEM）は，不確定性を有する場を Karhunen-Loéve 展開により効率的に展開し，また，解を Polynomial Chaos 展開された空間上で求める．

ここでは，剛性を確率過程と想定し，位置 x における剛性を $G(x,\theta)$ と表す．θ は確率空間における対応する事象を表す．剛性 $G(x,\theta)$ を

$$G(x,\theta) = \bar{G}(x) + \sum_{n=1}^{N_{KL}} \xi_n(\theta) G_n(x) \quad \cdots\cdots (1)$$

と Karhunen-Loéve 展開する．ここで，ξ_i は，正規直交性を有する独立 Gauss 確率変数であり，$\bar{G}$ は G の期待値である．解 $u(\theta)$ を Polynomial Chaos （多項式汎関数）$\Gamma_n(\xi_{i_1}(\theta),\cdots,\xi_{i_k}(\theta))$ の張る Homogeneous Chaos 上への射影として

$$u(x,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1+\cdots+n_k=n} \sum_{i_1,\ldots,n_k} \left\{ a_{i_1,\cdots,i_k}^{n_1,\cdots,n_k}(x)\, \Gamma_n(\xi_{i_1}(\theta),\cdots,\xi_{i_k}(\theta)) \right\} \quad \cdots\cdots (2)$$

とする．ここで，Polynomial Chaos は，Hermite 多項式汎関数である．実際の計算においては，剛性及び解のいずれの展開次数も有限で打ちきる．SSFEM では，式 (1),(2) を波動方程式 $\rho\ddot{u} + Gu = f$ (f:入力) に代入し，それを Homogeneous Chaos 上へ射影することで解を算出するものである．

(1) SSFEM のマトリクス

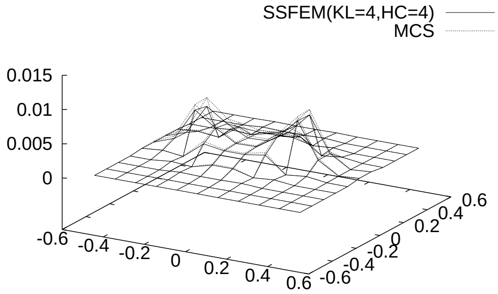
SSFEM では，Polynomial Chaos 展開で考慮されている次数までの係数が独立な未知変数となるため，フルマトリクスを用いると仮定すると，そのサイズは大きくなる．例えば，Karhunen-Loéve 展開を 2 次まで用い（KL=2），2 次の Homogeneous Chaos までを考慮する（HC=2）とき，Polynomial Chaos の数は 6 となり，マトリクスの規模は通常の有限要素法の約 $6\times 6 = 36$ 倍になり，KL=4, HC=4 の時には，$70\times 70 = 4,900$ 倍になる．

ただし，SSFEM のマトリクスは，非常に疎である．一般の有限要素法で扱う大きさの領域をブロックとすると，対角位置のブロックは非零で，非対角位置のブロックの多くは零になるからである．

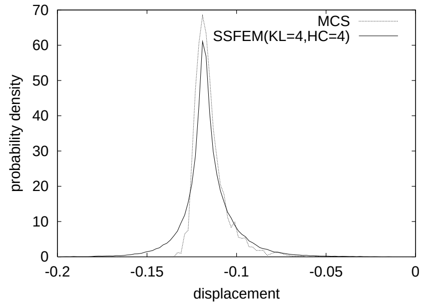
(2) 時間積分法

解析を効率的に行うための手法として，酒井ら[2)]が提案した収束計算を伴わない時間積分法（Non-Iterative Time Integration Scheme, 以下，NITI 法）を適用する方法を提案する．NITI 法は，変位依存の外力が作用する問題や剛性が変位量依存の非線形性を有する動的な問題を効率的に計算する手法である．NITI 法は，陽解法と同様に収束計算を要しないが，陰解法と同程度の安定性を有するため，離散時間間隔を大きくとることが可能であり，計算量を減ずることが可能な手法である．NITI 法では，安定性が高い陰解法と，外力が変位などの

キーワード: 確率有限要素法，ランダム場，波動伝播，時間積分法
連絡先: 〒 611-0011 京都府宇治市五ヶ庄 Fax 0774-38-4067



(a) 分散の分布



(b) (-0.3,-0.3) 地点における値の確率密度関数

図–1 モンテカルロシミュレーションと確率有限要素法 (KL 展開 4 次，HC 展開 4 次) により得られた変位（x 成分,$t=1.5$）の解析結果の比較．

陰関数である場合でも収束計算が不要な陽解法を組み合わせる．ここでは，陰解法としては Newmark β 法において $\beta=\frac{1}{4}$ としたものを用い，陽解法としては中央差分法を用いる．

提案する計算方法では，剛性マトリクスのうち，対角ブロックの部分のみを剛性マトリクスとして扱い，非対角ブロックに変位を乗じたものを外力項として作用させて定式化する．剛性マトリクス K が，対角ブロックのみからなるマトリクス K^{D} と，非対各ブロックのみからなるマトリクス K^{ND} を用いて $K=K^{\mathrm{D}}+K^{\mathrm{ND}}$ と表せるため，運動方程式は

$$M\ddot{u}+K^{\mathrm{D}}u=f(t,u)-K^{\mathrm{ND}}u \quad \cdots\cdots (3)$$

と定式化される．この時，K^{D} は，ほぼ対角化された対称マトリクスとなり，運動方程式 (3) は，ガウスの消去法などの既知の種々の方法により効率的に計算することが可能である．また，右辺は，時間と変位に依存する外力と見なすことが可能であるため，その時間積分には NITI 法を用いることができる．

提案する手法においては，非対角ブロックからなる K^{ND} については，逆マトリクスを計算する必要はない．また，提案する手法では，対象としている問題を確定的な有限要素法で扱う場合と同じ規模に分割して扱うことが可能であるため，効率的な計算が可能である．

3. 計算例

NITI 法を適用した SSFEM による解析の例として，剛性がランダム場となっている地盤における波動伝播を考える．P-SV 波（面内変位）の二次元問題とする．1.0×1.0 の領域を考え，波源としては，モデル中央付近におけるインパルス的な体積膨張を想定した．

比較のため，2,500 回のモンテカルロシミュレーション (MCS) と，NITI 法を適用した SSFEM による解析結果を比較する．なお，SSFEM では，KL=4, HC=4 とした．

両者の解析で得られた時刻 $t=1.5$ における変位の x 成分の変位の分散を**図–1**(a) に示す．確率有限要素法により算出した分散は，MCS による分散を概ね評価できていることが分かる．また，MCS 及び SSFEM により得られる時刻 $t=1.5$ における $(-0.3,-0.3)$ の変位の確率密度分布を**図–1**(b) に示した．SSFEM による解析結果は MCS 結果をよく近似できていることが分かる．

4. おわりに

ランダムな媒体における波動伝播現象の解析のための手法として，スペクトル確率有限要素法（SSFEM）を適用すること，及びその時間積分に酒井らの方法を用いることを提案し，小規模なモデルを対象とした数値計算によりその妥当性を示した．

参考文献

1) R. G. Ghanem and P. D. Spanos : Stochastic Finite Elements – A Spectral Approach ,Springer-Verlag NY, 1991
2) 酒井久和・澤田純男, 土岐憲三: 収束計算を伴わない動的非線形 FEM のための時間積分法, 土木学会論文集, No.507/I-30, 1995