

円筒形水槽内容液の水平方向非線形振動の解析

正会員 高西照彦

1. まえがき 図-1に示すような円筒形TLD（同調液体ダンパー）内容液の水平方向非線形振動に対する等価振動系の解析的な定式化を考えると、その手掛りとなる基礎的な資料を得るために、その手始めとして、本論では摂動法を用いて円筒形水槽内容液の非線形振動の解析を行った。内容液の非線形振動に対する要因分析を行うためには、円筒容器の大きさ、加振振幅等の条件をいろいろ変えた場合について数多くの数値計算が必要である。有限要素法等による計算法では、1ケースの応答計算に非常に多くの計算時間を必要とするという難点がある。摂動法によればその計算時間は全く問題にならない程少なくて済むという利点がある。ここでは、摂動法を用いて調和加振を受ける円筒形水槽内容液の非線型振動数特性を求め

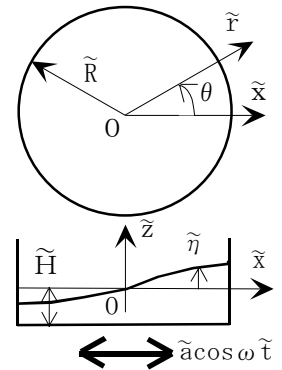


図-1 円筒形水槽及び座標系

ることができる理論式を示し、数値計算を行って、得られた結果を既存の実験結果^{1), 2)}と比較した。

2. 基礎方程式 流体運動を支配する基礎方程式及び境界条件についてはよく知られているので、それについて記述することは省略する。ただ、力学的条件式中に、次式に示す様に速度ポテンシャルに比例する減衰項を導入した。

$$\tilde{\varphi}_t + (1/2)\{(\tilde{\varphi}_r)^2 + (\tilde{\varphi}_\theta/\tilde{r})^2 + (\tilde{\varphi}_z)^2\} + g\tilde{\eta} + 2h_w n_{11}\tilde{\varphi} - \tilde{r}\tilde{a}\omega^2 \cos\theta \cos\omega\tilde{t} = 0 \quad (1)$$

ここに、 $\tilde{\eta}$ は波高、 g は重力の加速度、 h_w は減衰定数である。 n_{11} は内容液の r, θ 方向に対する(1,1)モードの固有振動数である。また、下付き添字は微分を表す。

3. 基礎方程式の無次元化と摂動解 基礎方程式と境界条件式において、以下に示すような無次元化を行う。 $t = \omega\tilde{t}$, $\tilde{R} = \mu_{11}R$, $\tilde{H} = HR$ 。ここに、 μ_{11} は $J'_1(\mu_{11}) = 0$ を満たす定数で、 $\mu_{11} = 1.8411\cdots$ である。また、摂動項としては、 $\tilde{a}/R$ を小さいとして $\varepsilon = \tilde{a}/R$ を採用し、水深についてはそれは浅く、振動数については n_{11} 近傍のみを考えることにする。さらに、摂動解を得るために $\tilde{\varphi}, \tilde{\eta}$ を次式に示す様に摂動項 ε を用いて展開する。

$$\tilde{\varphi} = \varphi_0 + \varepsilon^{1/2}\varphi_1 + \varepsilon\varphi_2 + \cdots \quad (2), \quad \tilde{\eta} = \eta_0 + \varepsilon^{1/2}\eta_1 + \varepsilon\eta_2 + \cdots \quad (3)$$

式(2),(3)を基礎方程式及び境界条件式に代入し、摂動法を適用して、 $\varepsilon^{1/2}$ までの項を採用すれば、次に示すような解が得られる。 A 及び C を r, θ, t の関数 $A = A(r, \theta, t)$, $C = C(r, \theta, t)$ として、

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= A \quad (4), \quad \eta_0 = -\kappa(A_t + 2h_w n_{11}/\omega A), \quad (5), \quad \varphi_1 = -(1/2)(\tilde{z} + \kappa)(A_{tt} + 2h_w n_{11}/\omega A_t) + C \quad (6) \\ \eta_1 &= -\kappa\{(\lambda - \kappa^2/3)(A_t + 2h_w n_{11}/\omega A) - (1/2)\kappa^2(A_{ttt} + 4h_w n_{11}/\omega A_{tt}) + A_r^2/2 + A_\theta^2/2r^2 - r\cos\theta\cos t\} \\ &\quad - \kappa(C_t + 2h_w n_{11}/\omega C) \quad (7) \end{aligned}$$

$$A \text{ 及び } C \text{ の満足すべき非線形微分方程式は } A_{rr} + A_r/r + A_{\theta\theta}/r^2 = A_{tt} + 2h_w n_{11}/\omega A_t \quad (8)$$

$$\begin{aligned} C_{rr} + C_r/r + C_{\theta\theta}/r^2 - C_{tt} - 2h_w n_{11}/\omega C_t &= (\lambda - \kappa^2/3)A_{tt} - \kappa^2 A_{ttt}/3 + 2A_r A_{rt} + 2A_\theta A_{\theta t}/r^2 + A_t A_{tt} \\ &\quad + r\cos\theta\cos t + 2h_w n_{11}/\omega\{(\lambda - \kappa^2/3)A_t - 2\kappa^2 A_{tt}/3 + A_r^2 + A_\theta^2/r^2 + AA_{tt} + A_t^2\} \quad (9) \end{aligned}$$

ここに、 $\kappa = H\varepsilon^{-1/4}$, $\lambda = \{(\omega/n_{11})^2 - 1\}\varepsilon^{-1/2}$

4. 非線形微分方程式の解 式(8),(9)の解を次のように仮定する。

$$A = \sum_{n=0}^N \sum_{m=1}^M J_n(\Omega_{nm}r) T_{nm}(\Omega_{nm}t) \cos\theta \quad (10), \quad C = \sum_{n=0}^N \sum_{m=1}^M J_n(\Omega_{nm}r) \bar{T}_{nm}(t) \cos\theta \quad (11)$$

キーワード：円筒形貯槽、非線形振動、摂動法、壁面動水圧

連絡先：〒805-0035 北九州市八幡東区山路2丁目4-8, TEL.093-652-0994

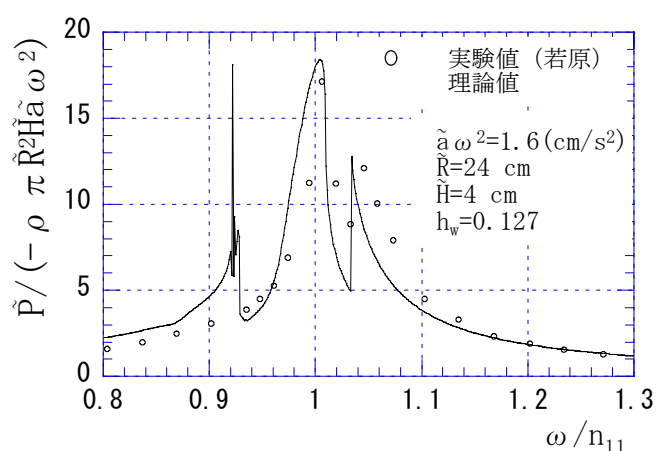
いま、 $J'_n(\mu_{nm})=0$ を満たす根を μ_{nm} とすれば、 $\Omega_{nm} = \mu_{nm}/\mu_{11}$ である。なお、 $J'_n(\)$ は第 1 種 n 次のベッセル関数であり、 $T_{nm}(\Omega_{nm}t)$, $\bar{T}_{nm}(t)$ は時間の関数である。さて、式(10),(11)を式(8),(9)に代入すれば、 θ に関する調和関数、 r に関するベッセル関数によって展開された式が得られる。ここで、この式が恒等的に成立する様に θ 及び r に関する各項の係数を定めれば、 $T_{nm}(\Omega_{nm}t)$, $\bar{T}_{nm}(t)$ に関する微分方程式が得られる。 $T_{nm}(\Omega_{nm}t)$, $\bar{T}_{nm}(t)$ を、それぞれその係数を未知数とするフーリエ級数で表した後、この微分方程式に代入し、 t に関する調和関数の各項の係数を比較することによって、上記の未定係数に関する非線形の連立代数方程式が得られる。繰返し計算によってこの連立方程式を解けば、これらの未定係数の値を定める事が出来る。これによって式(10),(11)の A 及び C が確定する。この A 及び C を用いれば、式(2)～(11)から貯槽内容液の速度ポテンシャル $\tilde{\phi}$ 及び波高 $\tilde{\eta}$ が求められることになる。全壁面動水圧 $\tilde{P}$ は次式によって算出することが出来る。

$$\tilde{P}/(-\rho\pi\tilde{R}^2\tilde{H}\tilde{a}\omega^2) = (\varepsilon^{-1/2}/\mu_{11}) \sum_{m=1}^M \Omega_{1m} J_1(\Omega_{1m}\mu_{11}) T'_{1m}(\Omega_{1m}t) \quad (12)$$

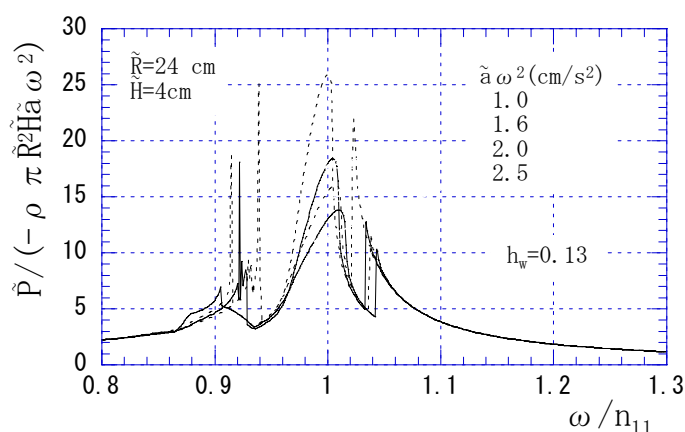
ここに、 $'$ は微分を表す。なお、上式は式(10),(11)において $N=1$ とした場合を示したものである。

5. 数値計算結果及び考察

数値計算に用いた円筒形貯槽及びその内容液に関する諸元、諸定数値は次の通りである。貯槽の半径は 24 cm、内容液は水であり、水深は 4 cm とした。したがって、1 次の固有円振動数は $n_{11} = 4.73 s^{-1}$ となる。式(10),(11)における N, M としては $N=1, M=2$ を採用した。減衰定数は $h_w = 0.13$ とした。調和波による加振は加速度振幅一定として $\tilde{a}\omega^2 = 1.0, 1.6, 2.0, 2.5 \text{ cm/s}^2$ の 4 段階に変え、それぞれの場合について、内容液の水平方向の全壁面動水圧に対する共振曲線を算出した。結果を図 - 2 及び図 - 3 に示した。図 - 2 は若原による実験結果¹⁾と比較したものである。 $\omega/n_{11} = 1$ における主要なピークと $\omega/n_{11} = 1.04$ 近傍における 2 次的なピークに関しては、計算結果は実験結果をよくフォローしているといえる。また、計算では $\omega/n_{11} = 0.92$ 近傍に不安定領域が存在しているが、若原の実験ではそのような現象は生じていない様である。しかし、大山の実験結果²⁾を見ると当該領域に小さなピークの存在が認められる。このピークが数値計算で生じた不安定領域に対応しているのではないかと考えられる。図 - 3 は入力加速度をいろいろ変えた場合について、それぞれ全壁面動水圧の振動数特性を示したものである。入力加速度が変化しても、特性曲線の主要ピークの生ずる位置は殆ど変化しないことがわかる。このことは両氏の実験結果と整合している。



図－1 全壁面動水圧の振動数特性（実験値との比較）



図－1 全壁面動水圧の振動数特性

1) 若原敏裕：同調液体ダンパーを用いた構造物の風応答制御に関する研究、学位論文。1996.10.

2) 大山巧：円筒容器内の非線形スロッシング現象の解析、土木学会論文集、第 417 号／II-13,1990.5.