

薄肉偏平殻の非線形振動特性の解析

長崎大学大学院 学生会員 田中 利志

長崎大学工学部 正会員 高橋 和雄
長崎大学工学部 正会員 中村 聖三

1. まえがき

ケーブル，偏平アーチ，殻などのようにライズをもつ構造物には，構造形状に起因する2次の非線形項が存在するために，各種の分岐現象が存在する。著者らは，板厚程度のライズをもつアーチや薄板の非線形振動を解析¹⁾しているが，本研究はさらに曲率が大きい領域まで取り扱い可能な薄肉殻構造を対象に非線形振動解析を行い，非線形振動特性と各種の偏平殻の形状パラメータの影響を明らかにしつつある。本研究では，薄肉偏平殻の非線形運動方程式を多自由度系に近似して，調和バランス法による非線形振動特性解析を行い，偏平殻の形状，各種の面内・面外の境界条件のもとに，偏平殻の非線形振動特性を明らかにする。その際非線形振動数の無次元化は，これまでの解析²⁾ではそれぞれの構造形式の線形1次振動数で行っていたが，本研究では対応する平板の1次固有円振動数で行っている。また，ライズをもつ薄板と殻構造の解析値の比較，および汎用ソフトによる解析を行う。

2. 運動方程式及び境界条件

図-1に示す薄肉偏平殻の形状は次のように表わされる²⁾。

$$z = \frac{1}{2} \left\{ \frac{x(x-a)}{R_x} + \frac{y(y-b)}{R_y} \right\} \quad (0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b) \quad (1)$$

ここに， R_x, R_y : x 及び y 方向の曲率半径

薄肉偏平殻のたわみを w とすると，殻の非線形運動方程式と適合条件式は，次式で表わされる。

$$D \nabla^4 w - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{R_x} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{1}{R_y} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \rho d \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - p_0 \cos \Omega t = 0 \quad (2)$$

$$\frac{1}{Ed} \nabla^4 F - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{R_x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{R_y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (3)$$

ここに， t : 時間， d : 板厚， ρ : 板の密度， p : 荷重強度， Ω : 加振円振動数

$$D = \frac{Ed^3}{12(1-\nu^2)}, \quad \nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

E : ヤング率， ν : ポアソン比， F : Airy の応力関数

殻の境界条件は，曲げに対して4辺単純支持(S)，および全周辺固定支持(C)とし，面内変位 u, v は自由(1)もしくは固定(2)とする。

3. 解法

式(2)のたわみを境界条件を考慮し多自由度として，次のように仮定する。

$$w = \sum_i \sum_j T_{ij}(t) X_i(x) Y_j(y) \quad (4)$$

ここに， $T_{ij}(t)$: 未知の時間関数，

$X_i(x), Y_j(y)$: 境界条件を満足する関数

応力関数 F は，式(3)に式(4)を用いて，面内方向の境界条件を考慮して得られる。

運動方程式(2)に式(4)，および得られた応力関数 F を代入して，Galerkin法を適用し，1次モードと1個の高次モードを選ぶと，方程式(2)は次のような時間に関する非線形常微分運動方程式に変換される。

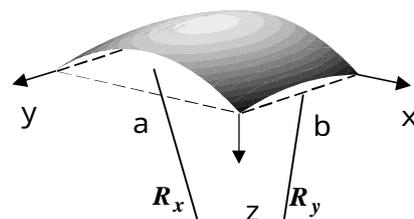


図-1 薄肉偏平殻の一般形状及び座標系

表-1 線形1次振動数の比較

ライズ比	解析解	FEM	%
0.5	1.203	1.206	-0.25
1.0	1.669	1.673	-0.24
1.5	2.234	2.232	0.09
2.0	2.834	2.814	0.71

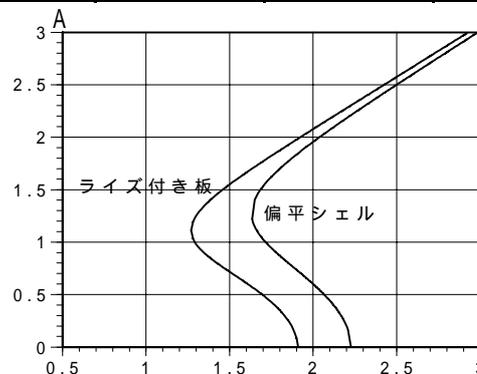


図-2 非線形振動特性の比較

キーワード：偏平殻，非線形振動

連絡先：〒852-8521 長崎市文教町 1-14 長崎大学工学部社会開発工学科 (TEL&FAX)095-848-9639

$$\begin{aligned} \ddot{T}_{11} + 2h'\sqrt{a'}\dot{T}_{11} + a'T_{11} + b'T_{11}^2 + c'T_{ij}^2 + d'T_{11}^3 + e'T_{11}T_{ij}^2 &= f'\bar{p}\cos\omega\tau \\ \ddot{T}_{ij} + 2h''\sqrt{a''}\dot{T}_{ij} + a''T_{ij} + b''T_{11}T_{ij} + c''T_{ij}^3 + d''T_{11}^2T_{ij} &= \delta_{ij}f''\bar{p}\cos\omega\tau \end{aligned} \tag{5}$$

ここに, $a', b', c', d', e', f', a'', b'', c'', d'', f''$: 係数,
 h', h'' : 減衰定数, δ_{ij} : Kronecker のデルタ関数,
 $\bar{p} = p_0 R_x / Ed\pi^2$: 荷重強度, $\omega = \Omega / \omega_0$: 無次元加振円振動数,
 $\tau = \omega_0 t$: 無次元時間

上式の解を次のように仮定する。

$$\begin{aligned} T_{11} &= c_0^{11} + c_{1/2}^{11} \cos \frac{\omega}{2} \tau + s_{1/2}^{11} \sin \frac{\omega}{2} \tau + c_1^{11} \cos \omega \tau + s_1^{11} \sin \omega \tau \\ T_{ij} &= c_0^{ij} + c_1^{ij} \cos \omega \tau + s_1^{ij} \sin \omega \tau \end{aligned} \tag{6}$$

ここに, $c_0^{11}, c_1^{11}, s_1^{11}$: 1次モードの付随型の振幅成分,
 $c_{1/2}^{11}, s_{1/2}^{11}$: 1次モードの分岐型の振幅成分
 $c_0^{ij}, c_1^{ij}, s_1^{ij}$: 高次モードの付随型の振幅成分

式(6)を式(5)に代入して, 調和バランス法を適用すれば連立非線形代数方程式が得られる。これに Newton - Raphson 法を用いて解けば, 振幅成分が得られる。

4. 解析結果

本研究で用いる無次元パラメータは, $\mu = a/b$ (縦横比),
 $k = d/R_x$, $e = a/R_x$, $\lambda = R_x/R_y$ (曲率半径比, $\lambda > 0$: ドーム形状, $\lambda = 0$: 円筒形状, $\lambda < 0$: 鞍形状) とする。

表-1, 図-2は $\mu = 1.0$ (正方形板), $\nu = 0.3$, $\lambda = 1.0$ のときの解析結果である。表-1は, 今回の解析とFEM解析による薄肉偏平殻の線形1次振動数の比較である。表より, 本研究における各ライズ比での線形1次振動数はFEM解析とほぼ同程度の精度で得られている。図-2に, ライズ比が1.0のときのライズ付き板と偏平シェル(nonlinear)の非線形振動特性を示す。図より, ライズ付き板と偏平シェルは, 固有振動数が異なるが同じ非線形振動特性を持つことがわかる。図-3~5は, 境界条件(S)と(C), 面内変位(1)と(2)について, $\mu = 1.0$, $\nu = 0.3$, $k = 0.01$ および $e = 0.4$ の場合に対する非線形振動自由振動曲線を曲率半径比をパラメータに示している。これらの図において, 縦軸は, 薄肉偏平殻の中央点の無次元振幅 A を, 横軸 ω は平板の1次固有円振動数で非線形自由振動数を無次元化している。これらの図より, 薄肉偏平殻の非線形自由振動特性が, 曲率半径比の影響を著しく受けることがわかる。 $\lambda \geq 0$ のとき, 振動数が振幅の増大とともに減少する軟化バネ特性を示す振幅領域が存在し, 非線形自由振動特性に軟化, 硬化ばね特性の共存が見受けられる。 $\lambda < 0$ のとき, 硬化ばね特性のみが現われている。図-3~5の比較より, 面外, 面内の境界条件がそれぞれ線形および非線形振動特性に影響を及ぼすことが分かる。

5. まとめ

殻構造の非線形振動特性を示したが, 高次振動に及ぼすパラメータの影響の評価および境界条件の影響については講演時に発表する。

参考文献

- 1) Takahashi, K. and Midou, S.: Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 48, 1999.
- 2) Kanazawa, K. and Hangai, Y.: Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 25, 1977.

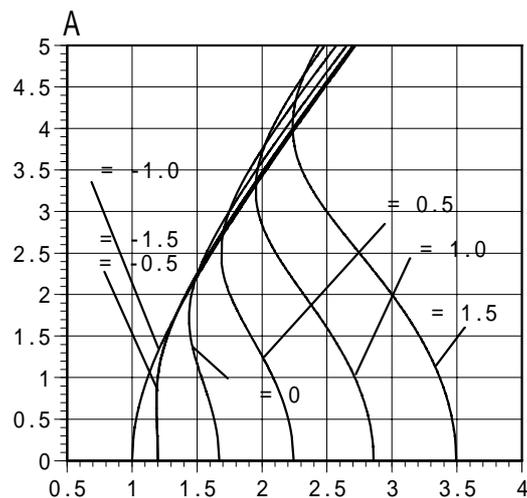


図-3 非線形自由振動 (S-1)

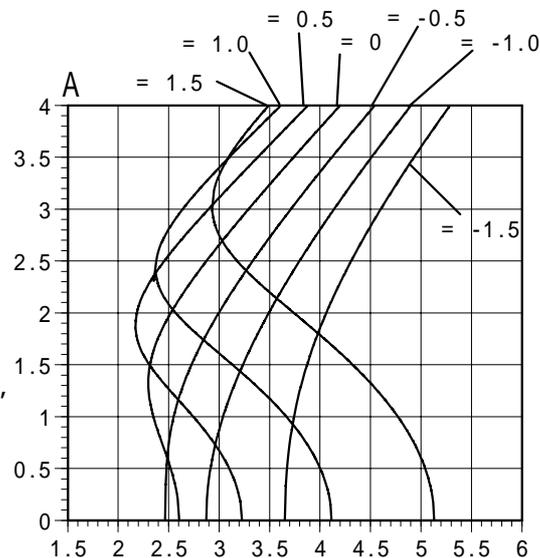


図-4 非線形自由振動 (S-2)

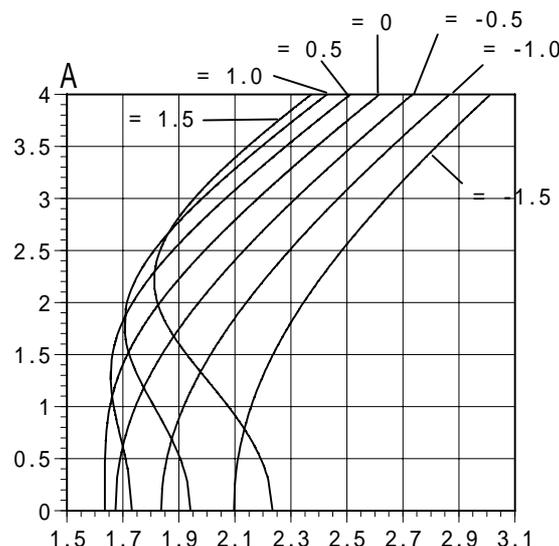


図-5 非線形自由振動 (C-1)