準乱数を用いた効率化積分とその構造信頼性評価への応用

阿南工業高等専門学校　正会員　松保明憲

１．まえがき　合理的な信頼性解析のためには、高次元の多重積分を精度良く評価することが必要である。多重積分の効率化手法として、擬似乱数を用いたモンテカルロシミュレーション法が広く使われているが、その誤差は、乱数のサンプル数 N に対して $N^{-0.5}$ のオーダーで、余り効率的ではない。一方、準乱数を用いた積分は、その誤差を N^{-1} 以上に改善可能である [1]。そこで著者は、準乱数を用いた積分を高次元の場合に適用する方法を提案し、その有効性を示した [2),3)]。本研究では、本手法の構造信頼性問題への適用を考える。

２．準乱数を用いた積分法　リヒトマイヤとヘイゼルグローブは、準乱数列 $\xi_n = ([n\alpha_1],[n\alpha_2],\ldots,[n\alpha_k])$ (式中、n=0,1,…)を用いて変数ベクトル $\vec{x}$ =(x_1,…,x_k)の積分値 I=∫…∫f($\vec{x}$)d$\vec{x}$ を I　S(N) =$\Sigma_n C_{Nn} f([n\alpha_1], [n\alpha_2], \cdots,[n\alpha_k])$の形の近似公式で評価することを提案している。ここで、k は積分の次元数、記号[・]はその数値の小数点以下の値、係数 α_j (j=1,2,…,k)は 0～1 の実数で、実験的に定める定数である。また、C_{Nn} はサンプル数 N が N→∞のとき厳密解 I となるように定める定数である。特に、簡単な場合として次式(1)

$$S_1(N) = \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} f([n\alpha_1],[n\alpha_2],\ldots,[n\alpha_k]) \quad (1a),\qquad S_2(N) = \frac{1}{(N+1)^2}\sum_{n=-N}^{N}(N+1-|n|)f([n\alpha_1],\ldots,[n\alpha_k]) \quad (1b)$$

を考えた場合、$S_1(N)$の誤差は N^{-1} で収束し、$S_2(N)$の誤差は N^{-2} で収束することが証明されており、効率の良い数値積分が可能である。係数 α_j (j=1,…,k)は、近似解 S(N)の誤差を最小にするように数値実験によって求める必要があるが、一般に、これを求めるには、膨大な時間を要する。そのため、低次元の多重積分に関する係数 α_j は求められている [1]が、高次元の多重積分に関する係数 α_j は求められていない。著者は、高次元の多重積分の計算に必要となる係数 α_j を遺伝的アルゴリズムを用いて求める方法を提案し、正規確率変数の結合確率密度関数を多重積分する場合に対し、その注意点をいくつか考察している [2),3)]。

３．構造信頼性の評価　限界状態確率 P_f は、対象システムが安全か否かを規定する限界状態を定義すれば、その事象が生起する確率として次式(2)のように計算することができる。

$$P_f = \int_{g(\vec{x},T)\leqq 0} f_{x1,\cdots,xk}(\vec{x})\, d\vec{x} \quad (2),\qquad g(\vec{x},T) > 0 \ \text{安全領域} \quad (3a),\qquad g(\vec{x},T) \leqq 0 \ \text{破損領域} \quad (3b)$$

式(2)中、$f_{x1,\ldots,xk}(X_1,\cdots,X_k)$はシステムを規定するパラメータ X_1, …, X_k の結合確率密度関数である。動的問題の場合、応答過程 X(t)を時間軸上で離散化し、各離散時点 t_i(i=0,1,2,…,k)での応答値 (不規則変数で構成される時系列) $X_i=X(t_i)$の同時確率密度関数 $f_{x1,\ldots,xk}(X_1,\cdots,X_k)$を式(3b)の破損領域にわたって積分することを意味する。(準)静的問題では、時間のパラメータを無視して考えれば良い。準乱数を用いて式(2)の積分を実行するためには、P_f　S(N) =$\Sigma_n C_{Nn} f([n\alpha_1], [n\alpha_2],\cdots,[n\alpha_k]) f_I([n\alpha_1], [n\alpha_2],\cdots,[n\alpha_k])$とすることができる。式中、$f_I([n\alpha_1], [n\alpha_2],\cdots,[n\alpha_k])$はベクトル($[n\alpha_1], [n\alpha_2],\cdots,[n\alpha_k]$)が破損領域内の時のみ１を取り、破損領域外の時には０を取るインディケータ関数である。

４．数値計算例　準乱数の有効性を示す例題と、現行設計されたトラス橋の信頼性評価の問題を考える。

4-1 擬似乱数との比較　式(4)で与えられる積分(真値 0.069398)を準乱数を用いて計算し、擬似乱数を用いたクルード法と比較する。結果を表１に示す。表より、準乱数法が非常に効率が良いことが分かる。

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left(e^{x1}e^{x2}e^{x3}e^{x4} - 1\right) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 \quad (4)$$

表１　準乱数と擬似乱数による積分の結果

サンプル数N	擬似乱数による積分	準乱数による積分	
		S_1(N)	S_2(N)
500	0.007845	0.068663	0.07164
1000	0.163068	0.067971	0.069211
10000	0.195986	0.069447	0.069353
10000000	0.064302		

Key word：準乱数、数値積分、効率化、構造信頼性　連絡先：〒774-0017 阿南市見能林青木 Tel.0884-23-7100

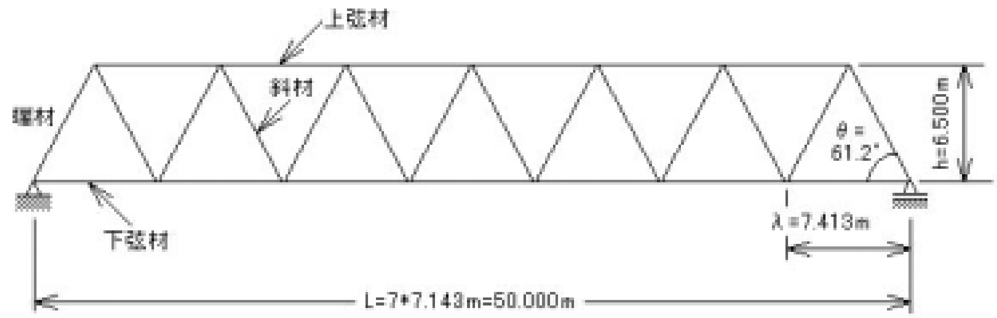

図１　27 部材トラス橋と着目部材

4-2 トラス橋の信頼性問題　図１に示す下路橋形式のトラス橋 [4)]の信頼性評価を行う。このトラス橋はＡ活荷重、支間Ｌ=50m、幅員 6m、使用鋼材 SM400 の条件で現行設計 [4)]されている。阪神高速道路公団による観測データによれば、大型トレーラ１台当たりの重量平均は 10.5tf、分散は 50.5tf であり、解析に際しては、本橋の危険な状態として大型トレーラ 4 台分相当がスパン中央に不規則集中荷重として作用するものとする。この荷重の大きさは正規確率分布に従うものと仮定する。限界状態の定義においては、各部材ｉの許容応力 σ_{ai} から対応する部材に作用する応力 σ_i を引いたものを安全余裕 $X_i=\sigma_{ai}-\sigma_i$ (i=1,2,…,27)と定義する。ここに、許容軸方向引張応力度を σ_{ta} =降伏点応力 σ_y/安全率 1.7 =140(N/mm^2)とし、また、有効座屈長 l、細長比 l/r、断面２次半径ｒに対して、許容軸方向圧縮応力度を σ_{ca} =140-0.82(l/r-18) (18<l/r<92 の時)、1200000/(6700+(l/r)^2) (l/r≧92 の時) (N/mm^2)とした。限界状態確率 P_f は、各部材の安全余裕 X_i(i=1,2,…)のいずれかがゼロ以下となる場合を限界状態と定義し、式(5)で与えられる正規確率変数の結合確率密度関数を限界状態の領域で積分することにより求めることができる。

$$f_{\vec{X}}(\vec{x})=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\cdot\frac{1}{\left|\overline{C}\right|^{\frac{1}{2}}}\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(x_i-\mu_i)M_{ij}(x_j-x_j)\right]\ (5),\quad \vec{X}=(X_i,\cdots,X_n)\ (6),\quad \overline{M}=[M_{ij}]=\overline{C}^{-1}\ (7)$$

表２　各相関係数に対する破壊確率 P_f

相関係数 ρ	限界状態確率 P_f	
	S_1	S_2
0	9.90556×10^{-4}	1.694998×10^{-3}
0.3	1.198×10^{-3}	2.057×10^{-3}
0.6	7.24895×10^{-3}	1.28423×10^{-2}

式(5)中、$\overline{C}$ は確率変数ベクトル(式(6)参照)の共分散行列、$\overline{C}^{-1}$ は $\overline{C}$ の逆行列である。各部材の安全余裕間の相関係数ρが 0、0.3、0.6 と仮定した場合の計算結果を表２に示す。表２より、相関係数が大きくなるにしたがい限界状態確率 P_f も大きくなることが分かる。参考までに、結合確率密度関数を積分するのではなく、対象現象を計算機内で発生させ、当該限界状態が発生する回数の総シミュレーション回数に対する比によって破壊確率 P_f を推定する単純モンテカルロ法では、27 部材分の強度が独立の場合 $P_f=1.34\times10^{-3}$ となった。

５．あとがき　本研究では、準乱数を用いた効率化積分法を構造信頼性問題へ適用し、その有効性を示した。

参考文献　1) 津田：モンテカルロ法とシミュレーション、改訂版、培風館、1987. 2) 松保･西丸：準乱数とGA を援用した効率的な積分法に関する基礎的研究, 第 23 回土木情報システムシンポジウム講演集, pp.85-88, 1998. 3) A.S. Matsuho, D.M. Frangopol：Development of Efficient Integral Method Using Quasi-random Number and Genetic Algorithm, Proc. of The fifth International Conference on Computational Structures Technology, pp.85-90, 2000. 4) 橘著、中井･北田改訂：橋梁工学、第５版、共立出版、2000.