

マルチフラクタルスペクトルを用いた自然風の自己相似性の検出

日本大学理工学部 正員 北川 徹哉
日本大学理工学部 正員 野村 卓史

1 はじめに

自然風などの乱流変動波形の慣性小領域は自己相似（フラクタル¹⁾）的であり、観察するスケールを適当な縮尺で変えても変動の様子は変化しないことが知られている。これがスペクトルにべき則をもたらす理由である。一方、測定した風速変動データからスペクトルのべき指数を求める場合、スペクトルを両対数軸上にプロットして直線をあてはめ、その勾配から推定するのが一般的である。しかし通常、一つの時系列から得られたスペクトルは変動した様相を呈する上、慣性小領域に相当する周波数帯を特定し難いため、直線のあてはめ方に解析者の主観が含まれてしまう。そこで本研究においては、マルチフラクタルスペクトル²⁾を用いて慣性小領域のべき指数の検出を試みる。

2 マルチフラクタルスペクトル

一点で測定された時間に関する1次元風速変動 $u(t)$ の散逸 $\varepsilon_T(t)$ を

$$\varepsilon_T(t) \equiv 1/(2T) \int_{t'-t < T} (du/dt)^2 \nu / 2 dt' \quad (T: \text{積分範囲(s)}, \nu: \text{動粘性係数}) \quad (1)$$

のように定義する²⁾。本来、散逸は3次元の空間に関する変動データに基づいて算出されるが、式(1)ではテイラーの凍結仮定が成り立つとして時間に関する積分におきかえ、さらに1次元に簡略化している。散逸 $\varepsilon_T(t)$ の q 次モーメント($q > R$)の平均 $\langle \varepsilon_T^q \rangle$ と積分範囲 T との間に $\langle \varepsilon_T^q \rangle \sim T^{-\tau_q}$ のべき則が成り立てば $\varepsilon_T(t)$ はフラクタル的である。この時、散逸に関するマルチフラクタルスペクトル(Cramer関数) $F(\alpha)$ が

$$F(\alpha) = \inf_q [q(\alpha - 1) + 1 - \tau_q] \quad (2)$$

のように得られる。 $F(\alpha)$ と τ_q は互いにルジャンドル変換によって結ばれている。さらに、式(2)において $h = \alpha / 3$ とし、 h についての関数におきかえたものが風速変動 $u(t)$ のマルチフラクタルスペクトル $D(h)$ である。その単位は次元であり、解析対象の時刻歴が1次元データの場合 $D(h) = 1$ となる。ここで h はヘルダー指数もしくは特異性指数とよばれ、時刻歴の各点における変動の様子を表す指数である。マルチフラクタルスペクトル $D(h)$ がピークを示す $h=h_p$ は、 Δt 秒離れた速度の差分が

$$u(t + \Delta t) - u(t) \sim \Delta t^{h_p} \quad (3)$$

のように振る舞うことを意味する。式(3)は渦の両端の速度差と渦のスケールとの平均的な対応を表し、コルモゴロフの相似則の基礎となる関係である。仮に $u(t)$ がコルモゴロフの法則に従う時刻歴であれば $h_p = 1/3$ となり、よく知られるように $u(t)$ のパワースペクトルは $-5/3$ 乗則を示す。

3 自然風の自己相似性の検出

図1は文献3)に示されている自然風の主流方向の風速変動の時刻歴 $u(t)$ である。その平均風速、乱れの強さはそれぞれ33.2m/s、8.4%であり、乱れのスケールは193m程度である。図1の時刻歴の各点における時間勾配の2乗を求めたものが図2であり、これは式(1)の被積分項に相当する。スパイク状のピークが間欠的に現れており、この特性はMeneveau & Sreenivasan⁴⁾が大気乱流の風速変動データから得た結果と整合する。図2のデータを用いて式(1)より散逸を求め、その q 次モーメントの平均を積分範囲 T に対して両対数軸にプロットし、直線性が得られれば勾配 τ_q が求まる(本解析においては $-1.5 < q < 4.5$ を考慮した)。例として、図3に $q=1.6, 1.8, 2$ における散逸と積分範囲との関係を示す。各 q において明確な直線を示しており、散逸がフラクタル的であることを意味する。なお、他の q においても同様に直線性が得られていた。各 q における τ_q を求め、式(2)および $h=\alpha/3$ の関係から算出した $u(t)$ のマルチフラクタルスペクトル $D(h)$ が図4である。 $h=h_p=0.358$ において $D(h)$ はピークを示し、その値は1である。通常、マルチフラクタルスペクトルは一点にピークを持ち、このピーク値 $D(h_p)$ がフラクタル次元とよばれる。図4の場合、ヘルダー指数 $h_p=0.358$ を有する変動が支配的であり時間軸上をほぼ覆っている(フラクタル次元=1)ことを意味する。ヘルダー指数 h_p はコルモゴロフの $1/3$ ($=0.333$)乗則よりもやや大きい値となった。一方、式(1)における積分範囲の上限 $T=T_{max}$ が h_p におよぼす影響を図5に示す。本時刻歴の場合、 $T_{max} < 1.5$ sにおいてほぼ一定値を

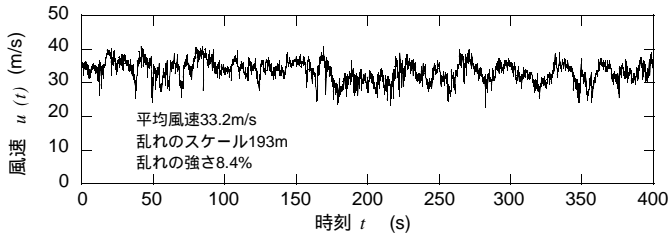


図1 自然風の時刻歴（主流方向）

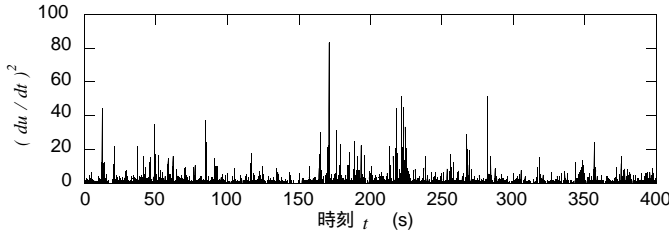


図2 風速変動の時間勾配の2乗

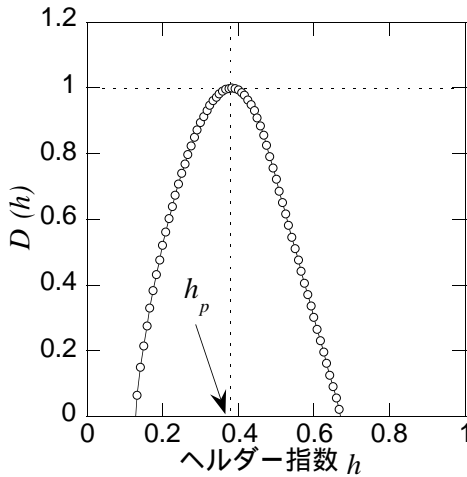


図4 マルチフラクタルスペクトル

示すが T_{max} 1.5 s では h_p がやや低下する傾向がみられた．これは式(1)の積分範囲がある程度以上になると $\langle \varepsilon_T^q \rangle$ の直線性が崩れ， τ_q の精度が落ちることに起因する．この T_{max} の有効範囲は時刻歴データの自己相似性の強さに依存すると思われる．また，逆に h_p が T_{max} に対して極端に不安定な場合，その時刻歴は自己相似性をもたないことになる．

慣性小領域のスペクトルの勾配は $-5 h_q$ のように表される．図4において得られた h_p を用いて，周波数領域における勾配を図6に示す．FFTを用いて求めた $u(t)$ のパワースペクトル，およびコルモゴロフの $-5/3$ 乗則もあわせて示している．慣性小領域と推定される高周波数において，本解析結果はFFTによるパワースペクトルの勾配と整合していると思われる．その勾配は -1.79 ($= -5 h_q$) であり，コルモゴロフの $-5/3$ ($= -1.67$) 乗則よりもやや急な勾配になっている．

参考文献 1) Mandelbrot, B.B. : *The fractal geometry of nature*, W. H. Freeman and Company, 1983. 2) Frisch, U. : *Turbulence*, Cambridge University Press, 1995. 3) 北川，野村：ウェーブレットを用いた間欠性を含む人工風速波形の生成の試み，日本風工学会論文集，第81号，pp.71-86，1999．4) Meneveau, C. M. and Sreenivasan, K. R. : The multifractal nature of turbulent energy dissipation, *Jour. Fluid Mech.*, Vol. 224, pp. 429-484, 1991.

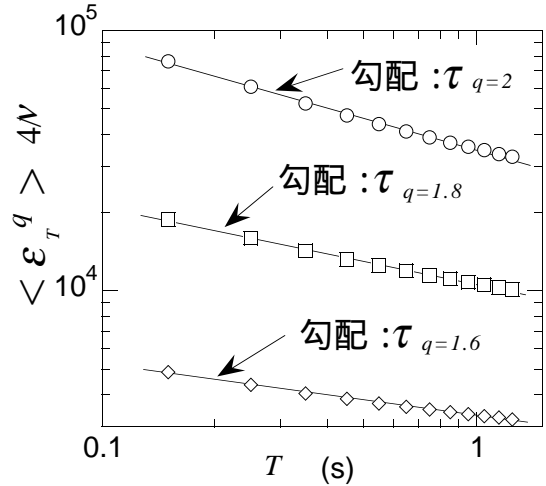


図3 散逸の1.6次，1.8次，2次モーメント

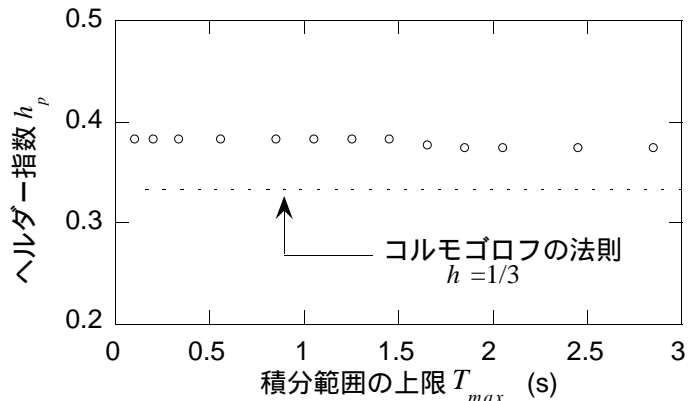


図5 積分範囲 T の上限 T_{max} がヘルダー指数に及ぼす影響

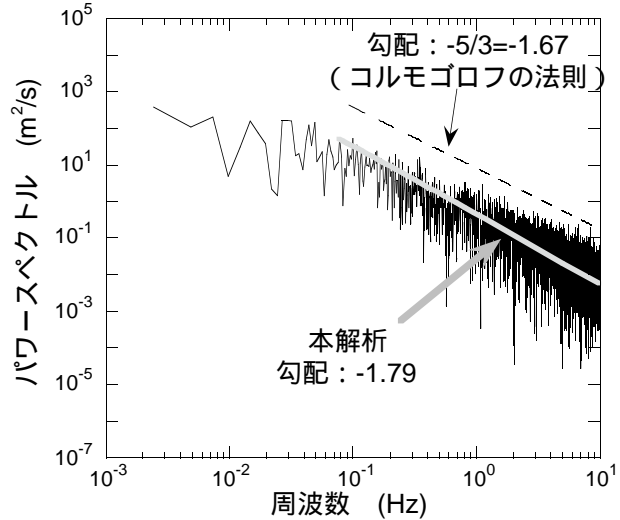


図6 周波数領域におけるべき則