顕示選好データに基づくゲームモデルの利得推定法

建設省中国地方建設局　正会員　井上慎也
鳥取大学工学部　正会員　喜多秀行
鳥取大学工学部　正会員　谷本圭志
鳥取大学工学部　正会員　福山　敬

1. はじめに

個々人の意思決定が相互に依存する行動の分析にはゲーム理論が有用であるが，中には利得の推定が容易でない現象も存在する．このとき，行動結果から利得を推定する方法があれば分析が可能となるが，著者らの知る限りこのような方法は存在しない．そこで，本研究ではゲーム的状況を対象とし，行動結果や行動に影響する要因から利得を推定する方法論の構築を行う．

2. 基本モデルの構築

(1) 対象とするゲーム

方法論の構築にあたり，過度の複雑さを避け議論の見通しをよくするためいくつかの条件を導入する．行動主体であるプレイヤーは$k(=1\sim N)$人存在する．各プレイヤーは完全情報の下でそれぞれ戦略$S_i^k\in \boldsymbol{S}^k(k=1\sim N)$をとることができ，その中から自分の利得$U_i^k\in \boldsymbol{U}^k$が最大となる最適戦略$S^{k^*}$を選ぶ．各プレイヤーの利得$U_i^k=U_i^k(S_i^k,\boldsymbol{S}^{-k})$は他プレイヤーの戦略$\boldsymbol{S}^{-k}(=\{\boldsymbol{S}^1,\cdots,\boldsymbol{S}^{k-1},\boldsymbol{S}^{k+1},\cdots,\boldsymbol{S}^N\})$との組み合わせで規定される．各プレイヤーの意思決定は同時であり，事前に打ち合わせをしたり，取り決めを行うことはできない．

(2) 利得の推定法

全てのプレイヤーが最適戦略S^{k^*}をとり，かつ各プレイヤーのとる戦略が互いに相手の戦略の最適戦略となるとき，最適戦略の組を均衡解$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{U})$という．各プレイヤーは均衡解$\boldsymbol{E}$によって規定された行動$\boldsymbol{A}=\{\boldsymbol{A}^k\}$をとる．

$$\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{A}^k(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{U})) \tag{1}$$

利得$\boldsymbol{U}$のうち，分析者が観測可能な要因による確定項を$\boldsymbol{V}$，観測不可能な要因に起因する誤差項を$\boldsymbol{\epsilon}$とし，その線形性を仮定する．

$$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{V}+\boldsymbol{\epsilon} \tag{2}$$

確定項$\boldsymbol{V}$は，パラメータ$\boldsymbol{\alpha}$と行動に影響する要因$\boldsymbol{X}$の線形結合$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{X})$とする．本研究では，この確定項のパラメータ$\boldsymbol{\alpha}$を推定することを試みる．まず，各プレイヤーの利得の確定項が$\boldsymbol{V}$という条件の下で行動結果の組$A_i=\{A_i^1,\boldsymbol{A}^{-1}\}(\boldsymbol{A}^{-1}=\{\boldsymbol{A}^2,\cdots,\boldsymbol{A}^N\},i=1\sim I)$が生起する確率$p_i$を以下のように表す．

表－1:利得行列

		P2 A_3 (q)	A_4 (1-q)
P1	A_1 (p)	(U_{11}^1,U_{11}^2)	(U_{12}^1,U_{12}^2)
	A_2 (1-p)	(U_{21}^1,U_{21}^2)	(U_{22}^1,U_{22}^2)

$$p_i \;=\; prob(A_i|\boldsymbol{V}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{X})) \tag{3}$$

観測されるデータは，各プレイヤーの行動結果の組A_iと行動に影響する要因$\boldsymbol{X}$である．観測データ数をM個とすると，尤度Lは以下の尤度関数で与えられる．

$$L=\prod_{i\in I}\prod_{m\in M}p_i^m \tag{4}$$

尤度を最大化するパラメータ$\hat{\boldsymbol{\alpha}}$は次式で与えられる．

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}=\arg\{\max_{\boldsymbol{\alpha}}L\} \tag{5}$$

なお，推定モデルの評価には尤度比ρ^2を用いる．

3. モデルの特定化：２人非協力ゲームの場合

(1) 対象とするゲーム

以下では，簡単のためP1,P2をプレイヤーとする2人ゲームを考える．P1の行動は$A_1,A_2(\in \boldsymbol{A}^1)$であり，行動$A_1$をとる確率を$p$，P2の行動を$A_3,A_4(\in \boldsymbol{A}^2)$とし，行動$A_3$をとる確率を$q$とする．$0\le p,q\le 1$である．利得行列を表-1のように表し，各プレイヤーは期待利得を最大化する．P1,P2の利得U_{ij}^kの添字iはP1が行動A_1をとるとき1，行動A_2をとるとき2，jはP2が行動A_3をとるとき1，行動A_4をとるとき2，kはP1のとき1，P2のとき2である．

(2) 行動結果の導出

各プレイヤーの期待利得の最大化よりP1,P2の最適反応を求め，行動結果を導出する．P1の期待利得は以下の式で求めることができる．

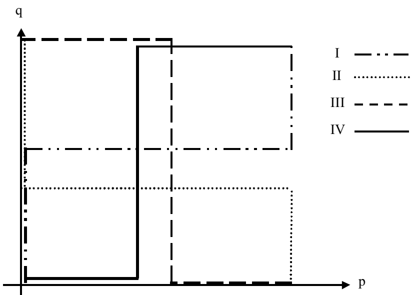
$$\begin{aligned}U(p,q) \;&=\; p\left\{qU_{11}^1+(1-q)U_{12}^1\right\}\\ &+\; (1-p)\left\{qU_{21}^1+(1-q)U_{22}^1\right\}\end{aligned} \tag{6}$$

P1の期待利得を最大化する行動は,

$$\frac{\partial U(p,q)}{\partial p} \;=\; 0 \tag{7}$$

から，

キーワード　ゲーム理論，逆解析，利得推定法，行動データ，２人非協力ゲーム
〒680-8552 鳥取市湖山町南4-101 TEL0857-31-5309 FAX 0857-31-0882



図－1:各プレイヤーの各最適反応曲線

$$\bar{q} = \frac{U_{22}^1 - U_{12}^1}{(U_{22}^1 - U_{12}^1) + (U_{11}^1 - U_{21}^1)} \tag{8}$$

となる．このとき，$\bar{q}$の分母の正負の判定により2つの最適反応曲線(図-1中のI,II)が描ける．P2についても同様に行う(図-1中のIII,IV)．各プレイヤーの最適反応曲線を組み合わせることで，4種類の利得構造が出てくる．例えば図-1のIとIIIの組み合わせにより卍型の利得構造が得られる．各利得構造が生起する確率を$\xi^i(\alpha, x)$とおく．$\bar{p}, \bar{q} \leq 0$，$0 < \bar{p}, \bar{q} < 1$，$\bar{p}, \bar{q} \leq 1$なる区分に対応して各利得構造における行動結果が導出できる．ここで，$\bar{p}, \bar{q}$の各区分が生起する確率を$p_1 \sim p_3$,$q_1 \sim q_3$とする．卍型利得構造の場合の行動結果を表-2，行動結果の生起確率を表-3に示す．以上より，行動の組の生起確率$\psi(\alpha, x)$は次式で与えられる．

$$\begin{aligned}\psi(\alpha, x) &= \sum_i (\text{各利得構造の生起確率}\xi^i(\alpha, x)) \\ &\times \ (\text{各利得構造における行動の組の生起確率})\end{aligned} \tag{9}$$

4.　数値実験

上記モデルの推定能力を吟味するため,数値計算を行った．2人で行われたミーティングに関するサンプルデータを多数収集し,ミーティングを行った地域，2人の居住地域，ミーティングを行った地域の魅力度(例えばミーティング施設数）,両地域間の移動コストから利得関数のパラメータ推定を行うという設定である．

利得行列を表-4のように仮定する．このとき，均衡は$(A, B), (A, A), (B, B)$と複数均衡$(A, A)(B, B)$である．複数均衡の場合は総利得の大きい方の地域が常に選ばれるとする．ある地域で会合が行われる時の利得，$E_A = \alpha_1 x_A + b_1, E_B = \alpha_1 x_B + b_1$,は当該地域の魅力度$x_A$または$x_B$にのみ依存するとして$\alpha_1$を推定する．ここでは$\alpha_1 = 5.0, b_1 = -20.0$とし，サンプルごとに魅力度$x_A$,$x_B$を[0,10]，移動コスト$C_{AB}, C_{BA}$を[0,-20]，誤差項$\epsilon_1 \sim \epsilon_8$を[0,2]の範囲でそれぞれ一様乱数を発生して利得を計算し，その大小関係から行動結果を見出して仮想の行動データを作成した．

推定結果は$\hat{\alpha_1} = 4.816$，尤度比$\rho^2 = 0.988$であった．これは提案したモデルが十分高い推定力を有している

表－2:卍型利得構造の行動結果

	q_1 $(\bar{q} < 0)$	q_2 $(0 < \bar{q} < 1)$	q_3 $(\bar{q} > 1)$
p_1 $(\bar{p} < 0)$	(1,0)	(0,0)	(0,0)
p_2 $(0 < \bar{p} < 1)$	(1,0)	$(\bar{p}, \bar{q})$	(0,1)
p_3 $(\bar{p} > 1)$	(1,1)	(1,1)	(0,1)

表－3:卍型利得構造の行動結果の生起確率

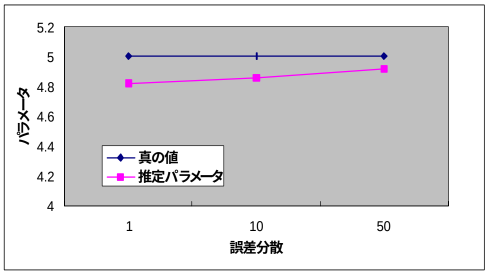
$p_3q_1 + p_3q_2$ $+ p_2q_2 \times \bar{p}\bar{q}$	$p_1q_1 + p_2q_1$ $+ p_2q_2 \times \bar{p}(1 - \bar{q})$
$p_2q_3 + p_3q_3$ $+ p_2q_2 \times (1 - \bar{p})\bar{q}$	$p_1q_2 + p_1q_2$ $+ p_2q_2 \times (1 - \bar{p})(1 - \bar{q})$

表－4:数値計算における利得行列

P2 (B地域の住民)

P1 (A地域の住民)	地域Bで会合を行う	地域Aで会合を行う
地域Aで会合を行う	(ϵ_1, ϵ_5)	$(E_A + \epsilon_2, E_A - C_{BA} + \epsilon_6)$
地域Bで会合を行う	$(E_B - C_{AB} + \epsilon_3, E_B + \epsilon_7)$	$(-R - C_{AB} + \epsilon_4, -R - C_{BA} + \epsilon_8)$

$\epsilon_1 \sim \epsilon_8$　：観測者に未知の誤差項
E_A, E_B　：地域AまたはBで会合が行われたときの利得
C_{AB}　：$P1$が地域Bに行ったときの移動コスト
C_{BA}　：$P2$が地域Aに行ったときの移動コスト
$-R$　：すれ違いが生じることの不効用(禁止的に大きな値)



図－2:誤差分散を変化させたときのパラメータの変動

ことを示すものである．また，誤差項の分散を変化させたときのパラメータの変動を図-2に示す．これより，本推定法では誤差分散が変化しても安定した推定が可能であることが理解される．

5.　おわりに

本研究では，行動結果と行動に影響する要因から利得を推定する方法論を構築し，2×2ゲームにおける利得推定法を提案した．シミュレーションデータに基づく数値実験を行ったところ，概ね妥当な推定結果が得られる事が実証された．これをもとにn人ゲームへの拡張を行い，より汎用的な方法論とすることが今後の課題である．