

# 異方性損傷構成方程式と岩盤の損傷進展解析

運輸省 正 浅井宏太  
法政大学 学 佐藤匡史  
法政大学 正 草深守人

## 1. はじめに

損傷力学は、材料中の微視的空隙や微小クラックのような微視的レベルにおける欠陥の力学的効果を連続的な変数場として把握し、材料中の微視的欠陥の発達とそれに伴う材料の挙動を考察するものである。これら微視的欠陥の形状、方向、分布などの進展は一般に応力あるいはひずみの方向性に依存しており、本来異方性であると考えられる。そしてこの異方性を考慮することは材料の破壊メカニズムの予測に関して重要な役割を果たすことになるといえよう。

本研究では、損傷の異方性を考慮した構成方程式の定式化と岩盤の掘削問題への適用結果について考察したものである。

## 2. 異方性損傷構成方程式

材料内部の損傷は微視的構造の変化によって生じ、この微視的構造の変化は非可逆的であり変形の履歴に依存し、巨視的なレベルでは非弾性変形（ひずみ）挙動として観察される。連続体力学では材料の力学的性質を表現するために巨視的変数である応力とひずみを関係づける構成方程式を必要とするが、非弾性体の構成方程式では、これらの巨視的変数に加えて変形履歴を表すことができる内部状態変数を必要とする。白石は材料を等方性とした場合について、主要な内部状態変数として等方性損傷  $D$ （スカラー）を選ぶことにより、次式の等方硬化弾塑性構成方程式を与えた。

$$d\sigma_{ij} = \left\{ E_{ijkl}(1-D) - \frac{E_{ijtu}(1-D) \frac{\partial g}{\partial \sigma_{tu}} - E_{rskl}(1-D) \frac{\partial g}{\partial \sigma_{rs}}}{h + \frac{\partial g}{\partial \sigma_{mn}} E_{mnpq}(1-D) \frac{\partial g}{\partial \sigma_{pq}}} \right\} d\varepsilon_{kl} - E_{ijkl} \dot{D} \varepsilon_{kl}^e \quad (1)$$

$$h = \frac{\partial \bar{F}}{\partial Y} \left( \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} E_{ijkl} \varepsilon_{kl}^e - \frac{\partial g}{\partial D} \right) - \frac{1 - \sqrt{3}\alpha}{\sqrt{9\alpha^2 + 3/2}} \frac{\partial g}{\partial k} \frac{dk}{d\varepsilon_{eq}^p} \sqrt{\frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}}$$

本文では、異方性損傷モデルの構成式の定式化をおこなうために、ひずみエネルギー密度  $\omega_e$  を式(2)のように偏差成分と静水圧成分に分け、それぞれに対して損傷量  $D_s, D_n$  といったダブルスカラー変数 (Energetic Definition of Double Scalar Variable) を与えることで異方性を考慮する。

$$\omega_e = \underbrace{\frac{1}{2} \frac{S_{ijkl}}{(1-D_s)} \sigma_{ij}^D \sigma_{kl}^D}_{\text{shear energy}} + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{S_{ijkl}}{(1-D_n)} \sigma_H^2 \delta_{ij} \delta_{kl}}_{\text{hydrostatic energy}} \quad (2)$$

ダブルスカラー変数の考え方を導入した散逸不等式は式(3)のように表すことができる。

$$\sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p + Y_s \dot{D}_s + Y_n \dot{D}_n \geq 0 \quad (3)$$

$$\dot{Y}_s = \frac{1}{2} \frac{S_{ijkl}}{(1-D_s)^2} \sigma_{ij}^D \sigma_{kl}^D, \quad \dot{Y}_n = \frac{1}{2} \frac{S_{ijkl}}{(1-D_n)^2} \sigma_H^2 \delta_{ij} \delta_{kl}$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \lambda \frac{\partial \bar{F}}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \dot{D}_s = \lambda \frac{\partial \bar{F}}{\partial Y_s}, \quad \dot{D}_n = \lambda \frac{\partial \bar{F}}{\partial Y_n}$$

さらに、異方性損傷を考慮した Drucker-Prager の降伏関数は次式のように与えられる。

$$f = \frac{\sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}\alpha} \left\{ \frac{1}{1 - D_s} \sqrt{J_{2D}} - \frac{\alpha}{1 - D_n} I_1 - \bar{k}(\varepsilon_{eq}^p) \right\} = 0 \quad (4)$$

損傷モデルに対する塑性ポテンシャル  $g$  が、降伏関数  $f$  に等しい関連流れ則 ( $g = f$ ) を仮定した場合、散逸ポテンシャル  $\bar{F}$  は次式のようになる。

$$\bar{F} = f + \frac{Y_s^2}{2S_s(1-D_s)} H(\varepsilon_{eq}^p - \varepsilon_d^p) + \frac{Y_n^2}{2S_n(1-D_n)} H(\varepsilon_{eq}^p - \varepsilon_d^p) \quad (5)$$

[ キーワード ] 損傷力学, 構成方程式, 異方性損傷, 岩盤, 連続体力学

[ 連絡先 ] 〒184 - 0002 東京都小金井市梶野町 3 - 7 - 2 法政大学工学部

ここで、 $\varepsilon_{eq}^p$ はDrucker-Pragerの降伏関数に対する相当塑性ひずみ、 $\varepsilon_d^p$ は損傷の進展が始まる直前の相当塑性ひずみ、 $S_s, S_n$ は損傷エネルギー強度と呼ばれる材料定数である。また、 $\bar{k}$ と損傷の進展開始を表すステップ関数 $H$ はそれぞれ次式で定義される。

$$\bar{k} = \left( \kappa + \frac{1 - \sqrt{3}\alpha}{\sqrt{3}} H' \int d\varepsilon_{eq}^p \right), \quad H(\varepsilon_{eq}^p - \varepsilon_d^p) \begin{cases} = 1 & \text{if } \varepsilon_{eq}^p \geq \varepsilon_d^p \\ = 0 & \text{if } \varepsilon_{eq}^p < \varepsilon_d^p \end{cases}$$

ここで、 $\alpha$ と $\kappa$ はDrucker-Pragerの降伏関数に含まれる材料定数であり、 $H'$ はひずみ硬化係数である。

以上より、異方性損傷モデルの弾塑性構成方程式は次式ようになる。ただし、ひずみ硬化は等方性とし、クロネッカーデルタのサフィックス $kl, tu, pq$ については成分のみを表し、総和規約はとらないこととする。

$$d\sigma_{ij} = \{E_{ijkl}(1 - D_n)\delta_{kl} - D_{pn} + E_{ijkl}(1 - D_s)(1 - \delta_{kl}) - D_{ps}\}d\varepsilon_{kl} - E_{ijkl}\dot{D}_n\varepsilon_{kl}\delta_{kl} - E_{ijkl}\dot{D}_s\varepsilon_{kl}(1 - \delta_{kl}) \quad (6)$$

ここで、

$$D_{pn} = \frac{E_{ijtu}(1 - D_n)a \frac{\partial f}{\partial \sigma_{tu}} \delta_{tu}}{h + b}, \quad D_{ps} = \frac{E_{ijtu}(1 - D_s)a \frac{\partial f}{\partial \sigma_{tu}} (1 - \delta_{tu})}{h + b}$$

$$a = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{rs}} E_{rskl}(1 - D_s)(1 - \delta_{kl}) + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{rs}} E_{rskl}(1 - D_n)\delta_{kl}, \quad b = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} E_{mnpq}(1 - D_s) \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} (1 - \delta_{pq}) + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} E_{mnpq}(1 - D_n) \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} \delta_{pq}$$

$$h = \frac{\partial F_{D_n}}{\partial Y_n} \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} E_{ijkl}\varepsilon_{kl}\delta_{kl} - \frac{\partial f}{\partial D_n} \right) + \frac{\partial F_{D_s}}{\partial Y_s} \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} E_{ijkl}\varepsilon_{kl}(1 - \delta_{kl}) - \frac{\partial f}{\partial D_s} \right) - \frac{\partial f}{\partial \bar{k}} \frac{d\bar{k}}{d\varepsilon_{eq}^p} C \sqrt{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}}$$

### 3. 解析結果および考察

具体的問題として、同一条件で等方性損傷モデル式(1)と提案する異方性損傷モデル式(6)を用いた斜面掘削問題の有限要素解析を実施し、両者の比較から異方性損傷が岩盤の安定性に及ぼす影響について考察した。

図1, 2, 3は掘削最終段階における損傷量 $D, D_s, D_n$ を表したものである。等方性損傷 $D$ の進展は古典的な均質地山に対する極限解析で見られるような円弧状の法先破壊に近い滑りを示した。一方、異方性モデルでは、偏差成分による損傷 $D_s$ が掘削斜面の内部滑りを支配し、静水圧成分に対する損傷 $D_n$ が斜面底盤部の破壊を支配しているようであり、斜面部の位置による応力状態の違いが破壊の進展領域を2分している。しかも、偏差成分による斜面の滑りは、等方性の場合と異なり法尻まで達することはなく、斜面内破壊を生じている。また、静水圧成分による破壊は、掘削斜面中央部以下にあり、底部破壊を引き起こす要因となる可能性がある。これら破壊領域の2分は、斜面内破壊に対してロックアンカーやロックボルト、底部破壊に対して押さえ盛土等の対策の有効性を説明しているように思われる。

### 4. 結論

熱力学的考察による異方性損傷モデルの構成式を具体的に明らかにし、これを組み込んだ有限要素プログラムを開発した。さらに地盤の掘削問題を中心とした具体例を解析し、従来の等方性解析との比較をおこなった。その結果、提案する構成式が材料内に方向性をもって発生する損傷とその進展過程をある程度表現できるものであることを示した。

### 参考文献

- [1] 白石保律：損傷力学の熱力学的考察と岩盤の損傷進展解析に関する基礎的研究，法政大学大学院修士論文，1997
- [2] Jean Lemaitre：A Course on Damage Mechanics, Springer-Verlag Berlin, 1996

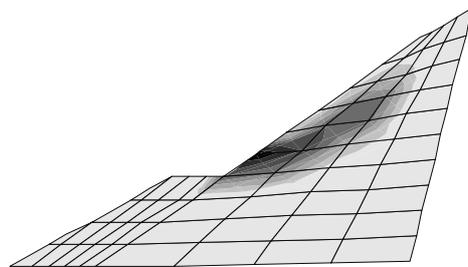


図1：等方性損傷量 $D$ 分布図

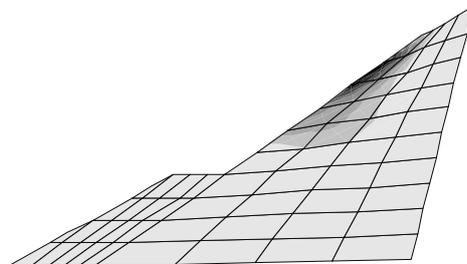


図2：異方性損傷量 $D_s$ 分布図

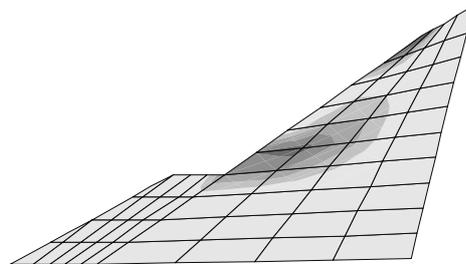


図3：異方性損傷量 $D_n$ 分布図