ハイブリッド型ペナルティ法による地下水浸透問題の解析

法政大学　学生会員　石垣智明
法政大学　正会員　竹内則雄
法政大学　正会員　草深守人
法政大学　正会員　武田　洋

１．はじめに

浸透流問題の解析を行う場合，有限要素法(FEM)や有限体積法(FVM)，差分法(FDM)などが用いられている．どの方法も領域を部分領域や格子により分割して解析が進められるが，それらを分割する際の要素形状は，ポテンシャル場や水頭の内挿関数によって決定される．本研究では，著者ら[1]が提案したハイブリッド型のモデルの考え方を浸透流問題に適用した，新しい離散化手法を開発した．本手法は，水頭（ポテンシャル）の連続性を付帯条件として，これをペナルティにより一般的な重み付き残差方程式に導入して定式化を行い，水頭をテーラー展開し，１次項までで水頭場を表現して離散化方程式を誘導する．また，水頭場は要素毎に設定するため，任意形状の要素を用いることができ，全領域を部分領域に細分できる．そこで，本論文において，定式化および簡単な数値計算例によって，本手法により得られる解の精度について検討する．

２．支配方程式と付帯条件付きの重み付き残差法

定常浸透流の支配方程式は次式で与えられる．

$$\boldsymbol{L}^t\boldsymbol{v}+f=0,\quad \boldsymbol{v}=-\boldsymbol{k}\boldsymbol{d},\quad \boldsymbol{d}=\boldsymbol{L}h \tag{1}$$

ここで，$\boldsymbol{v}$ は流速，f は湧水量，$\boldsymbol{k}$ は透水係数，$\boldsymbol{d}$ は動水勾配，$\boldsymbol{L}$ は微分作用素である．式(1)に境界条件を満たす重みδhを乗じて領域Ωについて積分し，ガウスの発散定理を適用して得られた式に，境界における法線方向に対する流量の関係を考慮すると，離散領域に対する重み付き残差方程式が次のように得られる．

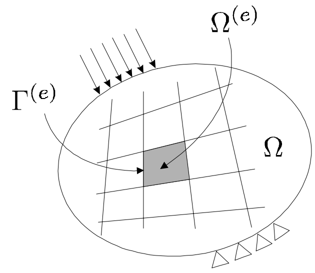

図１　部分領域$\Omega^{(e)}$

$$\sum_{e=1}^{M}\left(-\int_{\Omega^{(e)}}\boldsymbol{L}^t\delta h\boldsymbol{v}d\Omega+\int_{\Omega^{(e)}}\delta hfd\Omega\right)+\int_{\Gamma_q}\delta hqd\Gamma=0 \tag{2}$$

次に，要素境界面において水頭の連続性を弱め，この付帯条件をペナルティを用いて重み付き残差方程式に導入する．いま，**図２**に示すような，隣接する２つの部分領域$\Omega^{(a)}$と$\Omega^{(b)}$を考え，２つの部分領域の共通の境界$\Gamma_{<ab>}$において，付帯条件

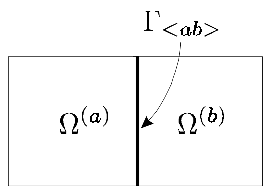

図２　部分領域$\Omega^{(a)}$**と**$\Omega^{(b)}$**の共通の境界**$\Gamma_{<ab>}$

$$\hat{h}^{(a)}=\hat{h}^{(b)}\qquad on\ \Gamma_{<ab>} \tag{3}$$

を隣接する要素の境界で共通なLagrangeの未定乗数λを用いて以下のように表す．

$$H_{ab}=\delta\int_{\Gamma_{<ab>}}\lambda\left(\hat{h}^{(a)}-\hat{h}^{(b)}\right)d\Gamma=\int_{\Gamma_{<ab>}}\delta\lambda\left(\hat{h}^{(a)}-\hat{h}^{(b)}\right)d\Gamma+\int_{\Gamma_{<ab>}}\lambda\left(\delta\hat{h}^{(a)}-\delta\hat{h}^{(b)}\right)d\Gamma \tag{4}$$

この関係を式(2)に導入し，隣接する２つの要素境界辺の数をＮとすると，付帯条件付きの重み付き残差方程式が以下のように得られる．

$$\sum_{e=1}^{M}\left(-\int_{\Omega^{(e)}}\boldsymbol{L}^t\delta h\boldsymbol{v}d\Omega+\int_{\Omega^{(e)}}\delta hfd\Omega\right)+\sum_{s=1}^{N}\left(\delta\int_{\Gamma_{<s>}}\lambda(\hat{h}^{(a)}-\hat{h}^{(b)})d\Gamma\right)+\int_{\Gamma_q}\delta hqd\Gamma=0 \tag{5}$$

３．水頭場と Lagrange の未定乗数

水頭をテーラー展開し，１次項までで水頭場を表すことを考えると，以下のようになる．

$$h^{(e)}=h_p+(x-x_p)d_x+(y-y_p)d_y \tag{6}$$

キーワード：浸透流，ペナルティ法，ハイブリッドモデル
〒184-8584　東京都小金井市梶野町 3-7-2

式(6)は，線形の水頭場を表しており，これを各要素毎に独立に設定する．このように，本手法で用いる水頭場は，要素内における任意点の水頭に加え，動水勾配を直接自由度として扱う．また，各要素内の任意点におけるパラメータを用いて要素内水頭場を表しているため，従来の FEM などのように節点において水頭を共有しない．すなわち，本論文における節点は領域形状を認識するために用いるのであって，自由度を設けるための節点ではない．したがって，要素形状は特に限定されず，任意の多角形，多面体，曲面体を部分領域として用いることができる．

次に，Lagrange の未定乗数は，式(5)を展開することにより，物理的には要素境界面における流量を意味していることが分かる．したがって，λが流量に対応するという点を考慮し，境界$\Gamma_{<ab>}$上の流量を次のように表す．

$$\lambda_{<ab>} = P\phi_{<ab>} \tag{7}$$

ここで，Pはペナルティを，$\phi_{<ab>}$は要素境界面$\Gamma_{<ab>}$上の相対的な水頭を表しており，次の関係がある．

$$\phi_{<ab>} = \hat{h}^{(a)} - \hat{h}^{(b)} \tag{8}$$

４．数値解析例

図３に本解析に用いたモデルを示す．解析にあたり要素分割は，正方形の一辺が 0.1m となるように深さ方向に 180 分割，幅方向に L/0.1 分割とした．また，境界条件として上端表面に沿ってポテンシャルΦ=0，右面の不透水壁下に沿ってΦ=1 と固定し，不透水壁 s と横幅 L の長さを変化させて解析を行った．また，ペナルティは，他の解析モデルで解の精度が十分に得られた，透水係数の 10^8 倍とした．**図４**に解析結果を示す．縦軸はポテンシャルΦ=1/Q を，横軸は深さと不透水壁の比 s/T を表している．また，横方向の幅 L と，非等方性の透水係数$R=\sqrt{k_V/k_H}$の積を，深さ T で除した値について整理した．実線が FEM で，● 印が本手法による解析結果である．FEM と本手法による結果は，どの点においても，ほぼ一致しているのが分かる．

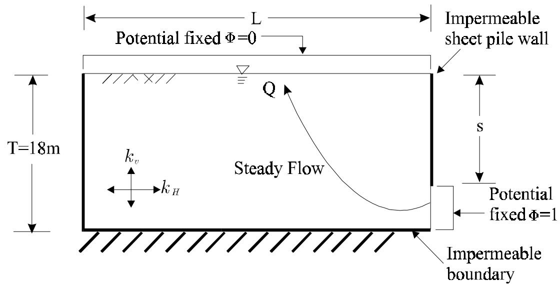

図３　解析モデル

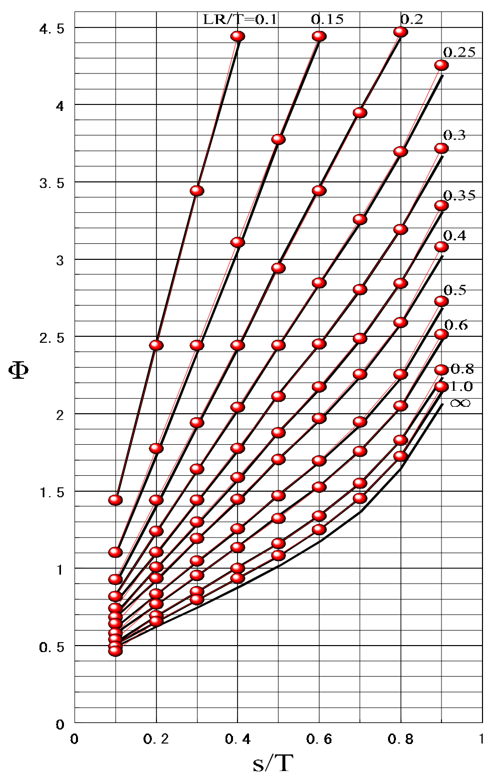

図４　解析結果

５．まとめ

本論文では，水頭の連続性を付帯条件として，これをペナルティにより一般的な重み付き残差方程式に導入して，水頭をテーラー展開し，１次項までで水頭場を表現して離散化モデルを誘導する，新しい離散化手法を示した．また，簡単な，自由表面のない定常浸透流問題の解析を行い，FEM による解と比較したところ，ほぼ同一な結果が得られた．したがって，本手法は，地盤内の地下水流動を明らかにするための有効な一手段であると考える．また，本手法の特徴は，水頭場を各要素独立に設定していることにより要素形状が任意であること，要素境界辺で流量が連続であることがあげられる．加えて，本手法は３次元化が容易であり，今後３次元問題を含め，実際の地盤を想定した実用的な問題を解析して，さらに精度の検証をする必要があるものと考える．

参考文献

1)竹内他　：　ペナルティを用いたハイブリッド型モデルによる離散化極限解析，構造工学論文集，Vol.46A, 2000
2)D.V.Griffiths　：　Rationalized chart for the method of fragment applied to confined seepage, Geotechnique, Vol.34, No.2, pp-229-238, 1984