均質化法に基づく粒状体マルチスケール解析法の開発とその応用

東北大学　学生員　○金子　賢治
東北大学　岸野佑次・京谷孝史・寺田賢二郎・神田隆真

１．はじめに

砂や土などの非均質性地盤材料は，粒状体としてモデル化され，その離散的な解析手法として個別要素法や粒状要素法[1]が広く用いられている．しかしながらそれらの解析手法は，粒状体の微視的変形機構の解明や構成則レベルの議論に対しては有効な手法であるが，スケールの差が大きいという理由等から，実地盤の工学的な境界値問題を解くという点については適さない．実際，離散解析を通して得られた微視的変形機構を何らかの形で連続体近似し，定式化された構成式を境界値問題に適用するといった方法が採られる．

これに対し非線形均質化理論に基づくマルチスケール解析法は，対象とする構造物の局所的な領域に想定した代表体積の解析を通して巨視的な材料挙動を得ることが出来る統一的な解法の一つであり，巨視・微視連成挙動を扱うものである[2]．

本研究では，非線形均質化理論を微視領域において周期的な代表体積が定義できるような粒状体に適用することにより，粒状体の巨視・微視連成挙動を扱うことのできる粒状体マルチスケール解析法を開発し，その応用例を示す．ここで言う巨視スケールとは，境界値問題が対象とする構造全体のスケールを指し，微視スケールとは，粒子レベルのことである．

２．粒状体マルチスケール解析法

図-１(a)に示すような力のつり合いの問題を考える．今，この構造体は**図-１(b)**に示すように，粒子がランダムに分布している基本単位構造（ユニットセル）を周期的に含んでいるものとする．この構造体の全体の３次元領域Ω^εにおいて，全粒子が占める領域Ω_G^εは空隙領域Ω_O^εおよび接触領域C^εを用いて$\Omega_G^\varepsilon = \Omega^\varepsilon \setminus \Omega_O^\varepsilon \setminus C^\varepsilon$と表され，また，その境界を$\partial\Omega_G^\varepsilon$とすると，**図-１(a)**の領域$\Omega_G^\varepsilon$の力のつり合いにおいては，

$$\partial\sigma_{ij}^\varepsilon(\boldsymbol{x})/\partial x_j + f_i^\varepsilon(\boldsymbol{x}) = 0 \quad \text{in} \quad \Omega_G^\varepsilon, \tag{1}$$

境界において，

$$\begin{cases} u_i^\varepsilon = 0 & \text{on} \quad \partial_u\Omega_G^\varepsilon \\ \sigma_{ij}^\varepsilon n_j = t_i & \text{on} \quad \partial_t\Omega_G^\varepsilon \end{cases} \tag{2}$$

が成立することが必要である．ここで，n_jは$\partial\Omega_G^\varepsilon$に立てた外向き単位法線ベクトルを表すものとする．

さらに，変位ひずみ関係式

$$e_{ij}^\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\left(\partial u_i^\varepsilon(\boldsymbol{x})/\partial x_j + \partial u_j^\varepsilon(\boldsymbol{x})/\partial x_i\right) \tag{3}$$

と，構成式が

$$\sigma_{ij}^\varepsilon(\boldsymbol{x}) = D_{ijkl}^\varepsilon(\boldsymbol{x}) e_{ij}^\varepsilon(\boldsymbol{x}) \tag{4}$$

と与えられる．ここで，上記の各変数の肩につけた添え字εは，それらが微視構造に依存する量であることを表している．

次に，接触領域C^εにおける接触および摩擦条件を示す．ユニットセル内には，N^C個の接触領域C_Iが存在し，その総体を$C^\varepsilon = \bigcup_{I=1}^{N^C} C_I$と定義する．**図-１(c)**に粒子$a$および$b$から形成される$I$番目の接触領域$C_I$における接触の様子を示し，粒子$a$に着目して接触条件および摩擦則を導入する．$\boldsymbol{n}^C$は接触領域$C_I$において粒子$a$の重心から粒子$b$の重心に向く単位法線ベクトルを表す．また，$(\boldsymbol{n}^C, \boldsymbol{t}^C)$が局所右手系座標となるように単位接線ベクトル$\boldsymbol{t}^C$を定める．このように設定した接触領域$C_I$においては，変位ベクトル$\boldsymbol{u}^\varepsilon$および応力ベクトル$\boldsymbol{T}^\varepsilon$が

$$\boldsymbol{u}^\varepsilon = \left\{u_n^\varepsilon, u_t^\varepsilon\right\}^{\mathrm{t}} \qquad \left(u_n^\varepsilon = \boldsymbol{u}^\varepsilon \cdot \boldsymbol{n}^C,\ u_t^\varepsilon = \boldsymbol{u}^\varepsilon \cdot \boldsymbol{t}^C\right)$$

$$\boldsymbol{T}^\varepsilon = \left\{T_n^\varepsilon, T_t^\varepsilon\right\}^{\mathrm{t}} \qquad \left(T_n^\varepsilon = \boldsymbol{T}^\varepsilon \cdot \boldsymbol{n}^C,\ T_t^\varepsilon = \boldsymbol{T}^\varepsilon \cdot \boldsymbol{t}^C\right)$$

のように分解され，接触条件および摩擦則が

$$\left[u_n^\varepsilon\right] \le 0,\ -T_n^\varepsilon \ge 0,\ -T_n^\varepsilon\left[u_n^\varepsilon\right] = 0 \quad \text{on } C_I \tag{5}$$

$$-T_n^\varepsilon \tan\phi + c \le |\,T_t^\varepsilon\,| \quad \text{on } C_I \tag{6}$$

と表される．ここで$[\Psi]$は領域a，bでの関数Ψの不連続量$\Psi_a - \Psi_b$を表している．また，cは粒子間粘着力，摩擦係数は内部摩擦角をϕとして$\tan\phi$とする．

以上のように，微視的内部構造が離散的な粒状体で構成される材料のつり合い問題は，式(1)から(4)で表される全体領域Ω_O^εのつり合い問題と，式(5)，(6)で示される接触領域C_Iにおける接触・摩擦による制約条件とにより記述される．

上の方程式(1)から(6)によって記述される問題は，$\boldsymbol{v}^\varepsilon$を変位$\boldsymbol{u}^\varepsilon$に対応する変分として以下の変分不等式で与えられるとされる[3]．

$$a(\boldsymbol{u}^\varepsilon, \boldsymbol{v}^\varepsilon - \boldsymbol{u}^\varepsilon) + j(\boldsymbol{u}^\varepsilon, \boldsymbol{v}^\varepsilon) - j(\boldsymbol{u}^\varepsilon, \boldsymbol{u}^\varepsilon) \ge l(\boldsymbol{v}^\varepsilon - \boldsymbol{u}^\varepsilon) \qquad \forall \boldsymbol{v}^\varepsilon \in K^\varepsilon \tag{7}$$

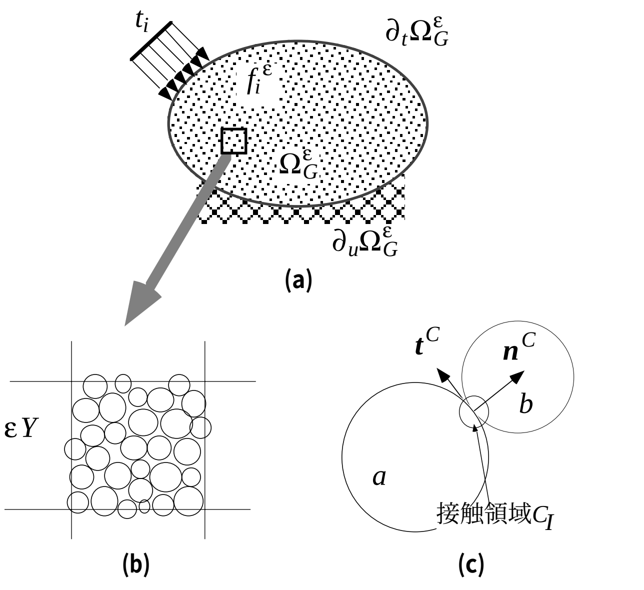

図-１　微視的周期構造を含む材料：(a)力のつり合いの問題；(b)粒状材料からなる周期構造；(c)接触領域の設定

キーワード：粒状体，マルチスケール解析，均質化法，粒状要素法
連絡先：〒980-8579　仙台市青葉区荒巻字青葉06土木工学科（電話）022-217-7425（FAX）022-217-7423

$$a(\boldsymbol{u}^{\varepsilon},\boldsymbol{v}^{\varepsilon})=\int_{\Omega_G^{\varepsilon}} D_{ijkl}^{\varepsilon}\frac{\partial u_k^{\varepsilon}}{\partial x_l}\frac{\partial v_i^{\varepsilon}}{\partial x_j}\,d\boldsymbol{x} \tag{8}$$

$$l(\boldsymbol{v}^{\varepsilon})=\int_{\partial_t\Omega_G^{\varepsilon}} t_i v_i^{\varepsilon}\,d\boldsymbol{x}+\int_{\Omega_G^{\varepsilon}} f_i^{\varepsilon} v_i^{\varepsilon}\,d\boldsymbol{x} \tag{9}$$

$$j(\boldsymbol{u}^{\varepsilon},\boldsymbol{v}^{\varepsilon})=\int_{C^{\varepsilon}}\tan\phi\left|T_n^{\varepsilon}(\boldsymbol{u}^{\varepsilon})\right|\left|\left[v_t^{\varepsilon}\right]\right|ds \tag{10}$$

この問題の変位に関する許容関数空間は，領域Ω_G^{ε}上の１位のSobolev空間

$$V^{\varepsilon}\left(\Omega_G^{\varepsilon}\right)=\left\{\boldsymbol{u}^{\varepsilon}\middle|\boldsymbol{u}^{\varepsilon}\in H^1\left(\Omega_G^{\varepsilon}\right);\boldsymbol{u}^{\varepsilon}=0\quad\text{on }\partial_u\Omega_G^{\varepsilon}\right\} \tag{11}$$

の部分集合である閉凸錐

$$K^{\varepsilon}\left(\Omega_G^{\varepsilon}\right)=\left\{\boldsymbol{u}^{\varepsilon}\middle|\boldsymbol{u}^{\varepsilon}\in V\left(\Omega_G^{\varepsilon}\right);\left[u_n^{\varepsilon}\right]\le 0\quad\text{on }C^{\varepsilon}\right\} \tag{12}$$

となる．そして，式(1)から(6)で記述されるこの問題は，閉凸錐K^{ε}上において変分不等式(7)を満たす解$\boldsymbol{u}^{\varepsilon}\in K^{\varepsilon}$を求める問題として定式化される．

式(7)から(10)で示される変分不等式に対して巨視スケール変数$\boldsymbol{x}$，微視スケール変数$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}/\varepsilon$を導入し，一般化収束の結論[4)]を用いることによって，領域Ω_G^{ε}は，全体領域Ωと基本単位構造Y_Gとに分解される．そして，巨視スケールの仮想仕事式

$$\int_{\Omega}\Sigma_{ij}\frac{\partial w_i^0}{\partial x_j}d\boldsymbol{x}=\int_{\Omega}\left[f_i\right]_Y^{\sim}w_i^0\,d\boldsymbol{x}+\int_{\partial_t\Omega}t_i w_i^0\,d\boldsymbol{x},\ \forall\boldsymbol{w}^0\in V \tag{13}$$

と微視問題の支配方程式

$$\int_{Y_G}D_{ijkl}\frac{\partial u_k^1}{\partial y_l}\frac{\partial w_i^1}{\partial y_j}d\boldsymbol{y}+\int_C\tan\phi\left|T_n(\boldsymbol{u}^1)\right|\left|\left[v_t^1\right]\right|ds-\int_C\tan\phi\left|T_n(\boldsymbol{u}^1)\right|\left|\left[u_t^1\right]\right|ds\ge -E_{ij}\int_{Y_G}D_{ijkl}\frac{\partial w_i^1}{\partial y_j}dy,\quad \forall\boldsymbol{w}^1\in K_{Y_G} \tag{14}$$

とが導出され，構成関係として

$$\Sigma_{ij}(\boldsymbol{x})=\int_{Y_G}\sigma_{ij}^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}/|Y| \tag{15}$$

が与えられる．マルチスケール解析では，これらの微視および巨視問題の支配方程式を同時に解くことにより解析を行う．巨視問題として式(13)を通常の有限要素法より巨視ひずみ$\boldsymbol{E}$を求め，それを各ガウス点ごとに微視問題の支配方程式(14)と等価な離散解析法と見なすことのできる周期境界制御粒状要素法[5)]に与えて巨視応力$\boldsymbol{\Sigma}$を算定する．こうして，式(13)と(14)を同時に満たす解を繰り返し計算により求めることにより，粒状体の微視・巨視連成挙動の解析が可能となる．

３．粒状体マルチスケール解析例

導出された微視・巨視連成挙動の解析の結果得られる変形挙動の妥当性を検討する．**図-２**に本解析に用いた微視および巨視解析モデルを示す．全体構造に対する初期拘束圧を0.2，0.3MPaとして２軸圧縮シミュレーション解析を行った．得られた巨視スケールの解析結果を**図-３**に示す．粒状体の拘束圧の変化による巨視的挙動が定性的によく表されていることがわかる．また，粒状体特有の性質であるダイレタンシー現象が良く表現されている．これは，全体構造の各点において行っている微視スケールでの接触・摩擦を伴う粒子の運動の影響により捉えられたものである．**図-４**はある点における粒子の運動を示したもので，このように，微視的な粒子の運動も同時に観察することもできる．

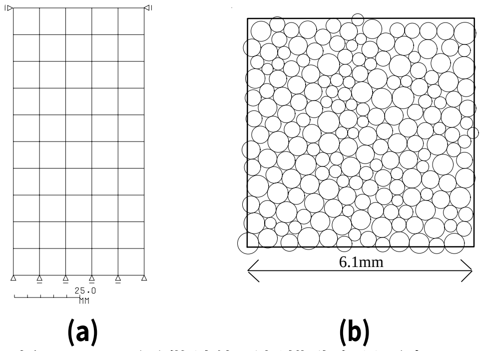

図-2　解析モデル：(a)供試体巨視構造有限要素モデル；(b)微視構造粒状要素モデル

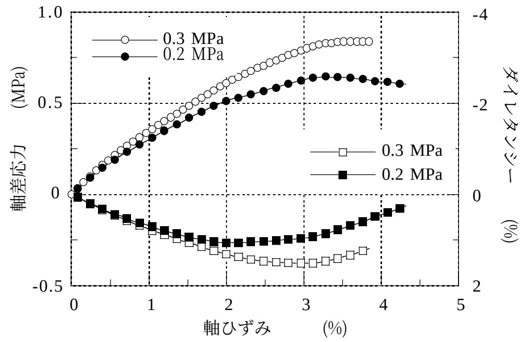

図-3　巨視的変形挙動の解析結果

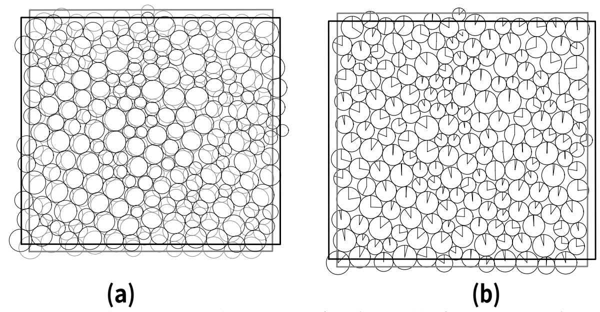

図-4　ある点における粒子の運動（初期拘束圧0.2MPa）：(a)粒子の移動；(b)粒子の回転

４．おわりに

本研究では，均質化理論を用いることにより粒状体の微視・巨視スケールの力学挙動を結びつけたマルチスケール解析法を開発した．開発したモデルは，連続体構成式を用いなくとも粒状体から構成される全体構造の変形挙動を解析できる点およびその微視力学的考察が可能である点が非常に優れており，定数の設定なども含めより現実に近いミクロモデルを導入することにより土質材料の工学的な境界値問題の解析が可能となるといえよう．

参考文献

1) 岸野佑次，粒状体の準静的挙動の解析，土木学会論文集，No.406/III-11, pp.97-116, 1989.
2) 寺田賢二郎，菊池昇，非均質弾塑性体のマルチスケール解析のための一般化アルゴリズム，土木学会論文集，633 / I-49, 217-229, 1999.
3) Kikuchi. N and Oden, J. T. : Contact Problem in Elasticity : A Study of Variational Inequalities and Finit Element Methods, SIAM, Philadelphia, 1988.
4) Snchez-Palencia, E. : Non-homogeneous Media and Vibration Theory, Springer-Verlag, Berlin, 1980.
5) 金子賢治，岸野佑次，林直宏，京谷孝史：粒状要素解析による地盤材料損傷モデルの定式化，応用力学論文集，JSCE，Vol.2, pp.427-438, 1999.